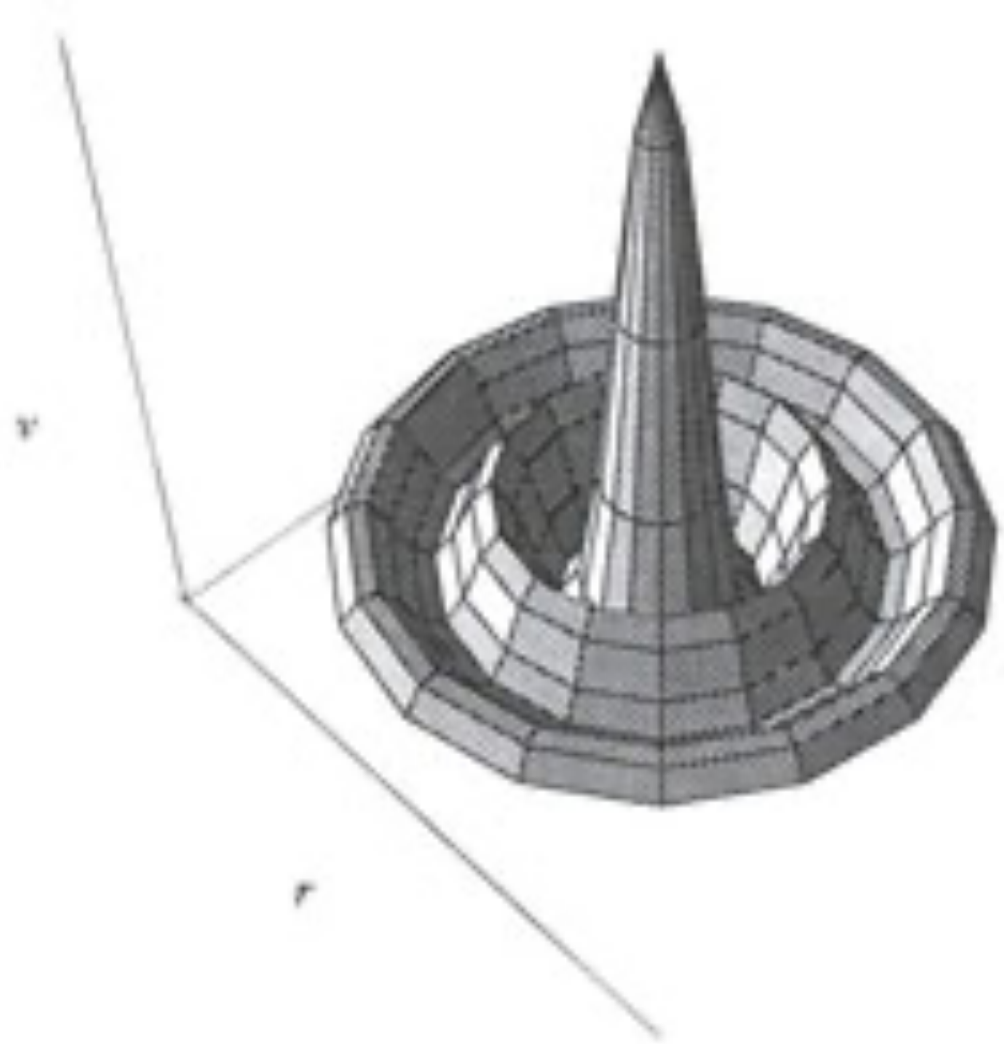

# SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA ELÍPTICO POR EL MÉTODO DE GALERKIN

Juan Luis Pillaca Meneses
Adrián Allaucca Paucar
Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Víctor Alcides Coaquira Cárdenas

Savez editorial

Savez editorial

# SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA ELÍPTICO POR EL MÉTODO DE GALERKIN

# SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA ELÍPTICO POR EL MÉTODO DE GALERKIN

Juan Luis Pillaca Meneses
Adrián Allaucca Paucar
Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Víctor Alcides Coaquira Cárdenas

Savez editorial

Juan Luis Pillaca Meneses
Adrián Allaucca Paucar
Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Víctor Alcides Coaquira Cárdenas

SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA ELÍPTICO
POR EL MÉTODO DE GALERKIN

Savez editorial

**Título:**

SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA ELÍPTICO
POR EL MÉTODO DE GALERKIN

Primera Edición: Julio 2022

**ISBN:** 978-9942-600-40-0
Obra revisada previamente por la modalidad doble par ciego, en caso de requerir información sobre el proceso comunicarse al correo electrónico editor@savezeditorial.com

# Índice general

# Índice de figuras

# Resumen

En la presente investigación titulada **Solución Débil de un Problema Elíptico por el Método de Galerkin**, se analizará un sistema elíptico en dominios acotados con la condición de Dirichlet. Se muestra la existencia de soluciones débiles utilizando el método de Galerkin.

El objetivo principal es demostrar la existencia de la solución débil y la importancia de conocer numerosas aplicaciones con sus propiedades en distintas áreas de la matemática que se verá a lo largo de este trabajo.

Para abordar nuestro estudio se considerará la función Caratheodory, el teorema del ángulo agudo, la definición de la solución débil, la desigualdad de Hólder, la desigualdad de Poincaré y el teorema de Green.

La presente investigación posee valor teórico y utilidad práctica para estudiar las ecuaciones diferenciales parciales, donde el trabajo de investigación se aborda desde la perspectiva de tipo explicativo y usa el método inductivo - deductivo.

Para ello es fundamental conocer los conceptos básicos del análisis funcional: espacios de Banach, espacios de Hilbert, teoría de distribuciones, espacios de Sobolev y teoremas importantes para encontrar el problema de tipo elíptico con condición de dirichlet.

**Palabras Claves**
Espacios de Banach, espacios de Hilbert, teoría de Distribución, espacios de Sobolev y método de Galerkin.

# Abstract

In the present investigation titled  textbf Weak Solution of an Elliptical Problem by Galerkin's Method, an elliptical system will be analyzed in bounded domains with the Dirichlet condition. Weak solutions are shown using Galerkin's method.

The main objective is to demonstrate the existence of the weak solution and the importance of knowing numerous applications with its properties in different areas of mathematics that will be seen throughout this work.

To address our study, we will consider the Caratheodory function, the acute angle theorem, the definition of the weak solution, the Holder-Poincaré inequality and Green's theorem.

This research has theoretical value and practical utility to study partial differential equations, where the research work is approached from an explanatory perspective and uses the inductive-deductive method.

For this, it is essential to know the basic concepts of functional analysis: Banach spaces, Hilbert spaces, distribution theory, Sobolev spaces and important theorems to find the elliptical type problem with dirichlet condition.

**Keywords**
Banach spaces, Hilbert spaces, Distribution theory, Sobolev spaces and Galerkin's method.

# Introducción

Históricamente el Análisis Funcional abstracto se desarrolló para responder a las cuestiones planteadas para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, en ella se muestra como los teoremas de existencia abstracta permite resolver este tipo de problemas. (Brezis, 1984)

Hay varios artículos que se pueden encontrar en revistas científicas donde la información que nos dan es muy relevante con respecto a los problemas elípticos no locales, como son los modelos matemáticos que nos permiten estudiar y analizar diversas situaciones del mundo real, así como también el impulso que dan a las carreras de ciencias física matemáticas en la búsqueda e implementación de nuevas metodologías para su resolución.

La búsqueda de aquellas soluciones ha incentivado de manera notable la investigación en las matemáticas como por ejemplo, el cálculo de variaciones, la series de Fourier, los espacios generalizados de Lebesgue que están designados por $L^p(\Omega)$ y los espacios generalizados de Lebesgue - Sobolev que se designan por $W^{m,p}(\Omega)$ (Kreyszig, 1984)

Con el transcurrir de los años, las investigaciones cambiarían debido a que se han encontrado ecuaciones que no tienen solución clásica y para resolver estas dificultades se logró desarrollar lo que se conoce como soluciones débiles.

Para el nuevo concepto de soluciones débiles se utilizó el espacio de Sobolev propuesto por el matemático Sergei Sobolev. Definimos el espacio de funciones basándonos en el concepto de derivadas débiles y consta de funciones $L^p(\Omega)$.

El objetivo de está investigación es determinar las condiciones bajo las cuales se garantizará la existencia de la solución débil de un problema elíptico por el método de Galerkin.

Las principales herramientas para tratar este problema es el espacio de Banach, espacio de Hilbert, la integral de Lebesgue y espacio de Sobolev.

Para demostrar la existencia se tomará en cuenta algunos métodos como es el método de Galerkin, regularidad de la solución débil, la función Caratheodory, teorema del ángulo agudo, teorema de la convergencia, la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Poincaré, que van a ser de gran ayuda para desarrollar el presente trabajo (Rudin, 1979).

Se considera el problema a estudiar de la forma:

$$\begin{cases} -\Big(\displaystyle\int_\Omega f(x,u)dx\Big)^\beta .\Delta u = \Big(f(x,u)\Big)^\alpha \; en \; \Omega \\ u = 0 \; sobre \; \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Donde $\alpha \; y \; \beta$ son constantes reales $f : \Omega \times [0, \infty >\to [0, \infty >$ es una función Caratheodory cuyas propiedades se verán en los siguientes capítulos con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ en un dominio abierto, acotado y suficientemente regular.

El trabajo está basado en el paper **On a class of nonlocal elliptic problems vía Galerkin method** de Francisco Julio S.A. Correa, Daniel C. de Morais Filho, donde se presenta un estudio detallado del problema a tratar, en la cuál se ha incluido la demostración de algunos resultados ya que el citado paper no contenia estas demostraciones, como son el teorema del ángulo agudo, la representación de Riez, entre otros.

Del problema 1 se tiene en la primera línea el problema elíptico no local y en la segunda línea está la condición de frontera.

El tema de investigación se ha dividido en cuatro capítulos:

En el capítulo uno está el marco teórico, los preliminares y los conceptos de investigación como son los espacios de Banach, los espacios de Hilbert, la teoría distribucional, espacio de Sobolev, teorema del ángulo agudo, método de Galerkin y otros.

El capítulo dos corresponde a la metodología: tenemos el tipo de investigación, diseño, nivel, enfoque y método.

El capítulo tres se realizará el estudio de las condiciones en donde se garantice la existencia de la solución para $\Omega$ acotado.

El capítulo cuatro se dará algunas conclusiones y/o recomendaciones del tema de investigación.

# Notación

- Cuerpo $\mathbb{K}$ real $\mathbb{R}$ o complejo $\mathbb{C}$.
- $\|\cdot\|$, es la norma en el espacio de Banach.
- $\mathcal{L}(X,Y)$ operadores lineales de $X$ en $Y$.
- $\mathcal{B}(X,Y)$ operadores lineales acotados de $X$ en $Y$.
- $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ familia de operador lineal acotado.
- $C([0,\infty[;X)$ espacio de función continua de $[0,\infty[$ en $X$.
- $C^1([0,T];X)$ espacio de función continua diferenciable de orden 1.
- $L^p(\mathbb{R})$ espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}$ de orden $p, 0 < p < \infty$.
- $|\cdot|$ norma en espacio de Hilbert.
- $L^2(0,1)$ espacio de Lebesgue de funciones cuadráticamente integrables.
- $\hookrightarrow$: inmersión continua.
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$: inmersión continua y compacta.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, limitado $\partial\Omega$ de clase $C^1$, $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$
- $\overline{\Omega}$ clausura o cerradura $\Omega$.
- $|\Omega|$ significa la medida de $\Omega$
- $\partial\Omega$ frontera del conjunto $\Omega$.
- $sop(u)$ soporte de $u$.
- Dado $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, el gradiente de $f$, que se denota $\nabla f$, define el vector de $\mathbb{R}^N$ así:
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$$

- Dado $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_N(x))$ campo vectorial de clase $C^1$, se define la divergencia de $F(x)$, y se denota así:
$$divF = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
donde $\nabla$ se define como:
$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)$$
- $L^p(\Omega)$ es un espacio de funciones p-integrables.
- $H^m(\Omega)$ llamado espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$.
- $H_1^0(\Omega)$ espacio de función en $H^1(\Omega)$ que tiene traza nula.
- $B_r(x)$ bola abierta cuyo centro es $x$ y radio $r > 0$. Si no tiene centro se dice que está en el origen.

CAPÍTULO 1

# MARCO TEÓRICO

## 1.1. Antecedentes

### 1.1.1. Internacionales

Según Cabada y Correa (2012), Existence of Solutions of a Nonlocal Elliptic System vía Galerkin Method. En está investigación se estudió el sistema elíptico, con algunas preguntas relacionadas a la existencia de la solución y se llegó a la conclusión de que el método de Galerkin es una herramienta importante utilizado para resolver problemas en un sistema elíptico. (Cabada, 2012)

### 1.1.2. Nacionales

Según Barahona (2018), Existencia de Soluciones Débiles de un Sistema Elíptico no local Semilineal, sustentado en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, finaliza que el método de Galerkin tiene muchas aplicaciones para hallar problemas no locales, un caso especial es ubicar la solución débil de tipo elíptico, el método empleado es aplicable a cierto tipo de ecuación diferencial parcial y/o ordinaria, que sea diferente a la condición de frontera (Barahona M., 2018).

## 1.2. Preliminares

Se comenzará introduciendo los conceptos topológicos que son de mucha importancia y además temas de análisis funcional, que también son importantes para el desarrollo de este trabajo. La gran mayoría de los cuales los hemos estudiado en el pregrado. (Rubiano, 2000)

**Definición 1.1** *Dado $X$ un conjunto diferente del vacío una familia $\tau$ de subconjuntos de X se llamará topología para $X$ y cumple los siguientes axiomas:*
$A_1$: $\phi,\ X \in \tau$.
$A_2$: *Si* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$, *donde I es la colección de índices de cardinal arbitrario,*

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$$

$A_3$: *Dado* $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \tau$, *entonces* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ *(Bourbaki, 1966).*
$(X,\tau)$ *se le llamará* ***espacio topológico****, cuyos elementos del grupo $\tau$ son conjuntos abiertos.*

**Observación 1.1** *Si* $(X, \tau)$ *es un* ***espacio topológico****, un subconjunto* $B$ *de* $X$ *es llamado cerrado si el complemento* $B^c = X \setminus B$ *es abierto en* $X$*, esto es* $B^c \in \tau$.

**Definición 1.2** *Dados dos espacios topológicos* $(X, \tau)$ *y* $(Y, \mu)$ *una función* $f : X \to Y$ *se dice continua si, y sólo si,* $f^{-1}(U) \in \tau$ *para cada* $U \in \mu$ *(Bourbaki, 1966).*

Es posible definir lo que significa que una función $f : X \to Y$ es continua en un punto $x_0 \in X$, de está manera:

**Definición 1.3** *Sea* $X, Y$ *espacios topológicos. Una función* $f : X \to Y$ *es continua en un punto* $x_0 \in X$ *si para cada vecindad* $V$ *de* $f(x_0)$ *en* $Y$ *existe una vecindad* $U$ *de* $x_0$ *en* $X$ *tal que* $f(U) \subseteq V$.

De está última definición se concluye de manera inmediata que una función $f : X \to Y$ es continua si, y sólo si, $f$ es continua en $x$ para cada $x \in X$.

**Definición 1.4** *Un espacio vectorial en el cuerpo* $\mathbb{K}$ *está dado por un conjunto no vacío* $X$ *y cumple lo siguiente:*
**+** : $X \times X \to X$ *(adición de vectores)*
**•** : $K \times X \to X$ *(producto por escalar)*

*Tales que* $\forall x, y, z \in X$ *y todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *se verifica lo siguiente:*

1. $X$ *se dice grupo abeliano respecto a la adición:*

   a) $x + y = y + x$.
   b) $(x + y) + z = x + (y + z)$.
   c) *Existe un único* $0 \in X$ *tal que* $x + 0 = 0 + x$.
   d) *Para cada* $x \in X$, $\exists -x \in X : x + (-x) = 0$.

2. *la multiplicación por escalar verifica:*

   a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
   b) $1x = x$ *(1 es la unidad en* $\mathbb{K}$*).*
   c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
   d) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

**Definición 1.5** *Sea un subconjunto* $M$ *de un espacio vectorial* $X$*, diremos que es un* ***subespacio vectorial*** *de* $X$ *si, y sólo si, para cualesquiera* $x, y \in M$ *y* $\alpha, \beta \in K$ *cumple que:* $\alpha x + \beta y \in M$ *(Hoffman, 1979).*

### 1.2.1. Espacios Métricos

**Definición 1.6** *Un espacio métrico es un par* $(X, d)$*, donde* $X$ *es un conjunto arbitrario diferente del vacío y* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *es una métrica, para todo* $x, y, z \in X$ *cumple:*

1. $d(x, y) \geq 0$.

2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$.

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(Lima, 1976)

**Definición 1.7** *Una sucesión* $\{x_n\}_{x \in \mathbb{N}}$ *de un espacio métrico* $(X, d)$ *es de Cauchy si* $\lim\limits_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$*, es equivalente a:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

**Definición 1.8** ***(Espacio Métrico Completo)****. Un espacio métrico* $X$ *es completo si toda sucesión de Cauchy en* $X$ *es convergente a algún elemento de* $X$ *(Lima, 1976).*

### 1.2.2. Espacios Normados

**Definición 1.9** *Un espacio vectorial* $X$ *se dice normado si, y sólo si, existe una función* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *(llamada norma en* $X$*) tal que,* $\forall x, y \in X$ *satisface:*

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$.

2. *Si* $\|x\| = 0 \iff x = 0, x \in X$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ *donde* $\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ *(Desigualdad Triangular) (Brezis, 1984).*

*(Barahona M., 2018)*

*Al par* $(X, \|\cdot\|)$ *se le denomina espacio vectorial normado.*

*Si no se cumple la condición (2), se llama seminorma.*

**Proposición 1.1** *Dos normas* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *son equivalentes si y sólo si* $\exists\, C_1, C_2 > 0$ *tales que:*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \quad \forall x \in X$$

**Observación 1.2** *Se mencionará lo siguiente:*

*1). Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pues dado el par* $(X, \|\cdot\|)$ *se define:*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

*2). Su recíproco de (1) no es válido, es decir no todo espacio métrico es normado.*

**Teorema 1.1** *Para* $n \in \mathbb{N}$*, el espacio* $(K^n, \|.\|_p)$ *es un espacio normado para todo* $p \in \mathbb{R}$ *y* $p > 1$

### 1.2.3. Espacios de Banach

**Definición 1.10** *Un espacio normado $(X, \|.\|)$ se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en $X$ (Dieudonné, 1981).*

**Definición 1.11** *Sea $X$ un espacio vectorial normado. Diremos que $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach si $(X, d)$ es un espacio métrico completo, donde $d$ es la distancia inducida por la norma, es decir, $d(x, y) = \|x - y\|$. (Hoffman, 1979)*

Algunos ejemplos de espacios de Banach son:

1. $\mathbb{C}$ con la norma usual.
2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \cdots, n\}$ con la norma:
$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| = \left(\sum_{j=i}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
3. $\mathbb{R}^n$ con la norma
$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_\infty = max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$
4. El espacio de las sucesiones acotadas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$
$$l_\infty(\mathbb{K}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^N : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$
con la norma
$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$
5. El espacio $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe considerando la norma $\|.\|$
6. El espacio $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \quad \lim\limits_{n\to\infty} = 0\}$ con la norma $\|.\|_\infty$
7. El espacio de las funciones continuas
$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{K}/f\, es\, continua\}$, con la norma
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

**Teorema 1.2** *Sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $p > 1$. El espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma:*
$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
*es un espacio de Banach.*

***Demostración*** Por el teorema 1.1, $\|.\|_p$ es una norma para el espacio, así sólo resta probar que $\mathbb{R}^n$ es completo. Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde $x_k = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$, una sucesión de Cauchy en $X$ y $\varepsilon > 0$ . Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $k, m \geq N$, se tiene:

$$\|x_k - x_m\|_p < \varepsilon$$

De esto se deduce:

$$\|x_{ki} - x_{mi}\| \leq \|x_k - x_m\|_p < \varepsilon$$

para cualesquiera $k, m \geq N$ e $1 \leq i \leq n$. Dada la completitud de $\mathbb{R}$, existe $y_i \in \mathbb{R}$ tal que $lim_{x_{ki}} = y_i$ para toda $1 \leq i \leq n$

Si llamamos $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ resulta que $lim_{k\to\infty} = y$.

En efecto

Para cada $i = 1, \cdots, n$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq N_i$, $|x_{ki} - y_i| < (\frac{\varepsilon}{n})^{\frac{1}{p}}$.

Sean $N = max\{N_1, \cdots, N_n\}$ y $k \geq N$, luego:

$$\|x_k - y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - y_i|^p < n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Por lo tanto $lim_{k\to\infty} x_k = y$ ■

**Definición 1.12** *Sean $X$ , $Y$ espacios normados. El operador lineal $L : X \to Y$ es un operador lineal acotado si hay una constante real positiva $M \geq 0$ talque:*

$$\|L(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

Sea $L : X \to Y$ un operador lineal acotado, se define la norma de este operador $L$ como:

$$\|L\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|}; \quad \|L\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Lx\|; \quad \|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|$$

(Banach, 1987)

**Teorema 1.3** *Se dice que el operador lineal es acotado si, y sólo si, es continua.*

***Demostración*** Ver (Gatica, 2011)

**Definición 1.13** *Sea $X$ espacio normado, se llamará duplo algebraico de $X$ a: $X^{\#} = \{f : X \to \mathbb{R} \quad f$ es lineal$\}$, se define el duplo o dual topológico de $X$ como $X^* = \{f : X \to \mathbb{R} \quad$ si $f$ es lineal y continua$\}$ que es el espacio de función lineal y continua. Idénticamente se define para el espacio bidual $X^{**}$ como espacio de función lineal y continua en $X^*$.*

**Definición 1.14** ***(Inmersión)*** *EL espacio normado $X$ se dice que está inmerso en un espacio normado $Y$, la notación es: $X \hookrightarrow Y$, si: (Medeiros, 2000).*

*(i) $X$ es subespacio vectorial de $Y$*

*(ii) El operador identidad $I$ definido sobre $X$ es continua, si:*

$$\exists C > 0 : |x|_Y \leq C|x|_X, \quad \forall x \in X$$

Una clase importante de espacios de Banach que permite generalizar propiedades algebraicas y geométricas del espacio Euclídeo es el espacio de Banach. (Barahona M., 2018)

**Definición 1.15** ***(Inmersión Contínua)*** *Sea $V$ y $H$ dos espacios de Hilbert con $V$ subespacio de $H$ $(V \subset H)$, diremos que $V$ está inmerso continuamente en $H$ y denotamos por $V \hookrightarrow H$ si existe $C > 0$ tal que:*

$$|u|_H \leq C\|u\|_V, \quad \forall u \in V$$

Sea el ejemplo para un caso:

$$V = H_0^1(\Omega) \text{ y } H = L^2(\Omega) \text{ ó } V = H^1(\Omega) \text{ y } H = L^2(\Omega)$$

**Definición 1.16** ***(Inmersión Compacta)*** *Se dice que la inmersión $V \hookrightarrow H$ es compacta, denotado $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ si el operador de inmersión $i : V \longrightarrow H$ es compacto, esto es cuando $i$ es continua y cada sucesión acotada en $V$ posee una subsucesión convergente en $H$ (Brezis, 1984).*

### 1.2.4. Espacios de Hilbert

Un **espacio de Hilbert** es un espacio pre - Hilbert completo con respecto a la métrica asociada. Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interno. (Barahona M., 2018)

"La noción de convergencia de sucesiones de números reales nos dá la idea de la generalización de la convergencia de sucesiones en un espacio lineal normado" (Kesavan, 1989).

**Definición 1.17** *Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado es convergente a un elemento $f$ del espacio sí, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ tenemos $\|f - f_n\| < \varepsilon$. Si $f_n$ converge a $f$ se escribe $f = \lim f_n$ ó $f_n \to f$*

**Definición 1.18** *Un espacio normado es llamado completo si toda sucesión de Cauchy en el espacio es convergente; es decir, si para toda sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio normado, existe $f$ en el espacio tal que $f_n \to f$.*

**Definición 1.19** *"Sea $X$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Un producto escalar o producto interno que se define en $X$ es una aplicación $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$" verifica:*

1. *(Aditiva)* $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v + w\rangle \quad \forall u, v, w \in X.$
2. *(Homogénea)* $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in X$ *y* $\forall \alpha \in K.$
3. *(Hermítica)* $\langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} \quad \forall u, v \in X.$
4. *(Definida positiva)* $\langle u, v\rangle \geq 0$ *y* $\langle u, u\rangle = 0$ *si, y solo si* $u = 0$. *(Rodney, 2009)*

"Toda aplicación que verifica $(1)$, $(2)$ y $(3)$ se llama forma **sesquilineal hermítica**" (Berberian, 1974)

**Definición 1.20** *Un espacio* $(X, \langle ., . \rangle)$ *dado de la siguiente forma para el producto escalar se dice espacio prehilbertiano.*

*Se define como:* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Y por tanto es también una métrica, con la distancia:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$$

**Corolario 1.1** *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

**Definición 1.21** *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial* $H$ *dotado de un producto interno y que es un espacio de Banach con la norma* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. *De aquí todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.*

**Teorema 1.4** *Sea* $H$ *el espacio de Hilbert. Entonces* $H$ *tiene un sistema ortonormal completamente numerable si y sólo si* $H$ *es separable.*

**Teorema 1.5** *Sea* $H$ *un espacio de Hilbert separable. de dimensión infinita, entonces* $H$ *tiene una base ortonormal y numerabel y es isométricamente isomorfo a* $L^2$ *Ver (Rodney, 2009)*

**Teorema 1.6** *(**Desigualdad de Cauchy-Schwarz**) Sea (X,*$\langle ., . \rangle$*) un espacio pre-Hilbert sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ *es:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

*(Gatica, 2011).*

**Demostración** *Ver (Gatica, 2011).*

**Proposición 1.2** *Un espacio lineal normado* $X$ *es completo si, y sólo si, cada serie absolutamente convergente, es convergente en* $X$ *(Rosas Cruz, 2005).*

***Demostración*** Ver (Rosas Cruz, 2005)

**Definición 1.22** *Sea* $X$ *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*; se llamará **espacio dual algebráico de** $X$, que denotamos por* $X^*$*, al* $\mathbb{R}$ *espacio vectorial*

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{R}/x^* \, es \, lineal \, y \, continuo\}$$

*(Kolmogorov, 1975).*

Para este espacio disponemos de una norma que se puede expresar de diferentes formas, como son

$$\begin{aligned} \|x\|^* &= min\{K > 0 : |x^*(x)| \leq K\|x\| \quad \forall x \in X\} \\ &= sup\{|x^*(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

para $x^* \in X^*$

La completitud de $\mathbb{R}$ nos asegura que $X^*$ es un espacio completo. El espacio de Banach $X^*$ recibe el nombre de **espacio dual topológico** del espacio normado $X$, para diferenciarlo del dual algebráico.

**Teorema 1.7** *(**Teorema de Representación de Riesz**) Sea $X$ un espacio de Hilbert y un funcional lineal $x^* \in X^*$ entonces existe un único $y \in X$ tal que:*
*$x^*(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x \in X$ y en este caso $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$ (Brezis, 1984).*

***Demostración*** Ver (Brezis, 1984)

**Definición 1.23** *(**Base Hilbertiana**) Sea $H$ un espacio de Hilbert separable, se llama base Hilbertiana (o base ortonormal) de $H$ a toda sucesión $(\Psi_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $H$, que constituye un sistema completo en $H$ y que verifica:*

*(i)* $(\Psi_n, \Psi_m) = 0, \quad \forall m \neq n$

*(ii) El espacio vectorial generado por $(\Psi_n)_{n\geq 1}$ es denso en $H$.*

(Brezis, 1984)

### 1.2.5. Topología Débil

**Definición 1.24** *Para cada $f \in X^*$, consideremos el funcional lineal $\phi_f : X \to \mathbb{R}$ definido por*

$$x \mapsto \phi_f(x) := \langle f, x\rangle$$

*y consideremos la familia $\{\phi_f\}_{f\in X^*}$. Llamamos topología débil $\sigma(X, X^*)$ sobre $X$ a la topología menos fina definida sobre $X$ que hace continuas a todas las aplicaciones $\phi_f$ (Brezis, 1984)*

**Teorema 1.8** *Sea $(x_n)$ una sucesión de elementos en $X$. Entonces:*

*i) $x_n \to x$ débilmente en $\sigma(X, X^*)$ si y solo si:*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall f \in X^*$$

*ii) Si $x_n \to x$ fuertemente, entonces:*

$$x_n \longrightarrow x\, debilmente\, en\, \sigma(X, X^*)$$

*iii) Si $x_n \to x$ débilmente en $\sigma(X.X^*)$, entonces la sucesión $\{\|x_n\|_X\}$ es acotada y verifica que:*

$$\|x\|_X \leq liminf \|x_n\|_X$$

*iv) Si $x_n \to x$ débilmente en $\sigma(X, X^*)$ y si $f_n \to f$ fuertemente en $X^*$ (es decir, $\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$), entonces:*

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$$

*(Brezis, 1984)*

**Teorema 1.9** *(**Banach - Alaoglu - Bourbaki**) La bola cerrada unitaria*

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\rangle$$

*es compacta en la topología débil $\sigma(X^*, X)$*

### 1.2.6. Espacios Reflexivos

**Definición 1.25** *Se define la inyección canónica topológica $J : X \to X^{**}$ de la siguiente forma: para cada $x \in X$, el funcional $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ definido por:*

$$f \mapsto (J_x)(f) = \langle f, x\rangle$$

*es lineal continuo. Es decir, $J_x$ es un elemento de $X^{**}$, verificandose que:*

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \quad \forall f \in X^*$$

*(Brezis, 1984)*

**Observación 1.3** *La inyección canónica $J$ es una isometría, es decir:*

$$\|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

*y, por consiguiente, también es una aplicación inyectiva.*

**Definición 1.26** *Sea $X$ un espacio normado. Decimos que $X$ es reflexivo si $J[X] = X^{**}$; es decir, $J$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios normados $X$ y $X^{**}$*

**Teorema 1.10** *Si $X$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces cada sucesión $\{x_n\}$ acotada en $X$ posee una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge en la topología débil $\sigma(X, X^*)$. (Brezis, 1984)*

**Teorema 1.11** *Digamos que $X$, $Y$ son espacios de Banach $T : X \to Y$ isometría suryectiva entonces $X$ es reflexivo si y sólo si $Y$ es reflexivo.*
*$T$ es isometría*

$$d(x, y) = d(T(x), T(y))$$

**Observación 1.4** *Toda isometría es inyectiva.*

**Propiedad 1.1** *"Sea $E$ espacio de Banach reflexivo, $M \subseteq E$ subespacio vectorial cerrado entonces $M$ dotado de la norma inducida por $E$ es reflexivo"(Brezis, 1984).*

Las aplicaciones $\{\varphi_f\}_f \in E'$ se denotará como $G(E, E') = \tau_w$, la topología débil ( o sea menos fina que hace continuas a $\varphi_f$ se genera por las $\{\varphi_f\}_f \in E'$ se denota como $x_n \to x$.

**Proposición 1.3**

*(1) Si $x_n \to x$ si, y sólo si $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E'$.*

*(2) Si $x_n \to x \Rightarrow (x_n)$ es acotada y $\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

*(3) $x_n \to x$ en $G(E, E')$ y $f_n \to f$ en $E' \Rightarrow \langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

### 1.2.7. Espacios Separables

**Definición 1.27** *Se dice que un espacio métrico es separable si existe un subconjunto $D \subseteq E$ tal que es numerable y denso en $E$ (Hernandez, 2018).*

**Definición 1.28** *$D$ es denso en $X$ si, y solo si, para cada $x$ en $X$ y cada $r > 0$ existe un $y$ en $D$ tal que $d(x, y) < r$. Es decir:*

$$D = \{x_1, x_2, \cdots, \} \subseteq E$$

**Ejemplo 1.1** *El espacio métrico $\mathbb{R}$ es separable porque $\mathbb{Q}$ es un subconjunto numerable y denso.*
*Mostremos que $\mathbb{Q}$ es denso. Dados $x$ en $\mathbb{R}$ y $r > 0$, encontremos $q$ en $(x - r, x + r) \bigcap \mathbb{Q}$. Entonces $q \in \mathbb{Q}$ y $d(x, q) < r$.*

**Corolario 1.2** *$E$ es espacio de Banach, reflexivo si y sólo si $E^{'}$ es reflexivo.*

**Teorema 1.12** *Sea $E$ un espacio de Banach tal que $E^{'}$ es separable. Entonces $E$ es separable.*

**Corolario 1.3** *Sea $E$ un espacio de Banach. Entonces $E$ es reflexivo y separable si y sólo si $E^{'}$ es reflexivo y separable.*

### 1.2.8. Isomorfismos e Isometrías

"Sean $X$ e $Y$ espacios normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $T : X \to Y$ es un isomorfismo si $T$ es biyectiva, lineal y continua y su inversa $T^{-1}$ es continua. En tal caso, también diremos que $X$ e $Y$ son isomorfos" (Cabello, 2009).

**Proposición 1.4** *Dados $X$ e $Y$ espacios normados.*

1. *"La aplicación $T \mapsto \|T\|$, de $L(X, Y)$ en $\mathbb{R}$ definida por:*

   $$\|T\| = sup \{\|T(x)\| : x \in B_X\}$$

   *Es una norma sobre $L(X, Y)$, conocida como la norma canónica de operadores. La topología generada por la norma de operadores se conoce como topología uniforme de operadores" (Cabello, 2009).*

2. *Se verifica:*

   $$\|T\| = sup \left\{\|T(x)\| : x \in B_X^0\right\} = sup \{\|T(x)\| : x \in S_X\}$$

   $$= min \{\beta \geq 0 : \|T(x)\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in X\}$$

   *En particular, $\|T(x)\| \geq \|T\|\|x\|; \quad \forall x \in X$ (Cabello, 2009).*

3. *"La convergencia en la norma canónica de operadores equivale a la convergencia uniforme en $B_X$, o a la convergencia uniforme en cada subconjunto acotado de $X$" (Cabello, 2009).*

4. *"Si $Y$ es un espacio de Banach, entonces el espacio $L(X, Y)$, con la norma canónica de operadores, también lo es" (Cabello, 2009).*

5. *"Si $Z$ es otro espacio normado, $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces la aplicación $ST : X \longrightarrow Z$ definida por:*

$$ST(x) = S(T(x)), \forall x \in X$$

*pertenece a $L(X,Z)$ y $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$" (Cabello, 2009).*

Notese que si $T$ es un isomorfismo de $(X, \|.\|)$ en $(Y, \|.\|)$, entonces en virtud de las desigualdades anteriores, la aplicación $x \mapsto \|x\|_1 = \|T(x)\|$, define una nueva norma en $X$ que es equivalente a la norma inicial $\|.\|$. Para probar de que todo isomorfismo entre espacios normados es una aplicación abierta se requiere de algunos teoremas y que todo espacio isomorfo a un espacio de Banach es también un espacio de Banach.

Si $T$ es un isomorfismo y mantiene las normas:

$$\|T(x)\| = \|x\|; \ (x \in X)$$

Se dice que $T : X \to Y$ es un isomorfismo isométrico y que $X$ e $Y$ son isométricamente isomorfos.

El isomorfirmo isométrico es la identificación total entre dos espacios normados. Si $T$ es un isomorfismo de $(X, \|.\|)$ en $(Y, \|.\|)$, y considero de nuevo la norma en $X$, $\|x\|_1 = \|T(x)\|$, entonces $T$ es un isomorfismo isométrico de $(X, \|.\|_1)$ en $(Y, \|.\|)$ (Cabello, 2009).

### 1.2.9. Medición de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y Funciones Medibles

**Definición 1.29**

*(a) El conjunto $M$ que consta de subconjuntos del conjunto $X$ se llama $\sigma$ - álgebra en $X$ si $M$ tiene las siguientes propiedades:*

*(i) $X \in M$.*

*(ii) Si $A \in M$ entonces $A^c \in M$.*

*(iii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in M$, $n = 1, 2, ...$ entonces $A \in M$. (Kolmogorov, 1975).*

*(b) "Si $M$ es un $\sigma$ - álgebra en $X$, entonces se dice que $X$ es un espacio medible y a los elementos de $M$ se les llama conjuntos medibles en $X$" (Kolmogorov, 1975).*

*(c) Se llama medida positiva a una función, definida en $\sigma$ - álgebra $M$ con valores en $[0, \infty\rangle$ y que es numerablemente aditiva, es decir que si $\{A_n\}_n \in \mathbb{N}$ es una colección numerable disjunta de elementos de $M$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

*(Barahona M., 2018).*

La contribución más importante de Henri Lebesgue (1875 - 1941) a las matemáticas fue la teoría de integración desarrollado por Lebesgue, en la que extendio el teorema de Riemann a una clase más extensa de funciones.

**Teorema 1.13** ***(Propiedades de medición externa )***

*(i)* $m^*(\Phi) = 0$

*(ii) (Monotonía) Si* $A \subseteq B, \quad m^*(A) \leq m^*(B)$

*(iii) (Subaditividad) Sea* $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia numerable de conjuntos; entonces*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\Omega_n)$$

*(iv) (Regularidad)*

$$m^*(\Omega) = inf\{m^*(G) : G \quad abierto, \quad \Omega \subseteq G\}$$

*(v) (Invariante por traslaciones) Para todo conjunto* $\Omega$ *y todo* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m^*(x + \Omega) = m^*(\Omega)$$

*(De Guzman, 1979).*

***Demostración*** Ver (De Guzman, 1979)

**Definición 1.30** *El conjunto* $\Omega$ *se dice Lebesgue medible, que en lo que sigue llamaremos simplemente medible, si verifica la siguiente propiedad: Para todo* $E$ *la igualdad se verifica:*

$$m^*(E) = m^*(E \cap \Omega) + m^*(E - \Omega)$$

*Se denotará por* $M$ *a la familia de todos los conjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *que son medibles. Se llama medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ *a la restricción de la medida exterior* $m^*$ *a* $M$*, es decir:*

$$\begin{aligned} m : M &\rightarrow [0; \infty] \\ A &\rightarrow m(A) = m^*(A) \end{aligned}$$

*Ver (Gatica, 2011).*

**Teorema 1.14** *En cada enunciado suponga que* $A, B \in M$*, entonces*

1. $A^C \in M$

2. $A \cap B \in M$ *y por tanto* $A - B \in M$

3. $A \cup B \in M$ *y si además* $A \cap B \in M$ *tiene medida finita,*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

*Ver (Gatica, 2011).*

***Demostración*** Ver (Gatica, 2011)

**Definición 1.31** *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \Omega \in M \quad y \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$*. Se dice que* $f$ *es medible si, para todo abierto* $G$ *de* $\mathbb{R}$*, la imagen inversa* $f^{-1}(G) = \{x \in \Omega : f(x) \in G\}$*, es un conjunto medible en* $\mathbb{R}^n$*. (Barahona M., 2018)*

**Observación 1.5** *Se tiene lo siguiente:*

*1. En primer lugar, $\Omega = f^{-1}(\mathbb{R})$ debe ser medible. Sólo tiene sentido hablar de funciones medibles si están definidas en conjuntos medibles.*

*2. Son equivqlentes:*

*(a) Se dice que $f$ es medible.*

*(b) Para todo conjunto $C \subseteq \mathbb{R} \quad cerrado, \quad f^{-1}(C) \in M$.*

*(c) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible si, y sólo si, la función característica*

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad definida \quad por \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

*es medible.*

**Teorema 1.15** *"Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \Omega \in M \quad y \quad f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible y $g : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ continuas en $f(\Omega)$. Entonces $(gof)$ es medible" (Gatica, 2011).*

***Demostración*** Ver (Gatica, 2011)

**Proposición 1.5** *$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \Omega \in M \quad y \quad f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones medibles.*
*Entonces:*

- *Para $\alpha \in \mathbb{R}$ se dice que $\alpha f$ es medible.*
- *$f + g \quad y \quad f - g$ son medibles.*
- *$f.g$ es medible.*
- *Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, $\frac{f}{g}$ también es medible.*
- *$|f|$ es medible.*
- *Si f es medible y $g = f$ en casi todas partes entonces $g$ también es medible, esto es, si existe un conjunto $E \subseteq \Omega$ con $m(E) = 0 \quad y \quad f(x) = g(x)$ para todos $x \in \Omega - E$, entonces $f$ es medible si, y sólo si, $g$ es medible (De Guzman, 1979).*

***Demostración*** Ver (De Guzman, 1979)

Recordemos que el **soporte** de una función $f : X \to \mathbb{R}$ que se denotará por $Sop(f)$, es la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Así el soporte de $f$ viene hacer el complemento del conjunto abierto más grande donde $f$ se anula" (Barahona M., 2018).

Denotaremos como $C_o(X)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de todas las funciones $f : X \to \mathbb{K}$ que tiene soporte compacto. Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por
$C^o(\Omega) = C(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre $\Omega$. Y si $k$ es un número entero no negativo, hacemos

$$C^k(\Omega) = \{u/u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad D^o u \in C^o(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

$$C_o^k(\Omega) \cap \{u/sop(u) \quad es \quad compacto \quad sop(u) \subseteq \Omega\}$$

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^{m}(\Omega)$$

Sobre $C(\Omega)$ se define la norma de convergencia uniforme, como:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

con la cuál es un espacio de Banach (Barahona M., 2018).

**Proposición 1.6** *"Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $C_o(\Omega)$, que converge puntualmente a una función $f \in C_o(\Omega)$. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f" (Gatica, 2011).*

***Demostración*** Ver (Gatica, 2011)

### 1.2.10. La Integral de Lebesgue

En la teoría de los espacios funcionales hay problemas con la integral de Riemann, problemas que no permiten llegar a ciertos teoremas indispensables. Los problemas aparecen cuando tratamos de hacer interactuar a la integral de Riemann con otras operaciones especiales como operaciones con límites por ejemplo, el límite de una sucesión de funciones integrables puede no ser integrable. Es cuando surge la necesidad de ampliar nuestro concepto de integral. Los problemas de la integral de Riemann pueden solucionarse mediante la generalización conocida como la integral de Lebesgue.

**Definición 1.32** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \Omega \in M \quad y \quad s : \Omega \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa.*

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi A_i, \quad A_i \cap A_j = \Phi, \quad i \neq j \quad y \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$$

*Se definirá la integral de $s$ en $\Omega$ por*

$$\int_{\Omega} s = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)$$

*(Kolmogorov, 1975)*

Mencionaremos algunos resultados importantes:

1. La integral es no negativa y puede ser infinita:

$$0 \leq \int_{\Omega} s \leq \infty$$

2. Geométricamente en $\mathbb{R}^3$, la integral de $s$ es la adición de los volúmenes de los prismas de base $A_i$ y altura $a_i$

**Proposición 1.7** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \Omega \in M \quad y \quad s_1; s_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones simples y no negativas. Entonces:*

*1.* $\int_{\Omega}(s_1 + s_2) = \int_{\Omega} s_1 + \int_{\Omega} s_2$

2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_\Omega \alpha s_1 = \alpha \int_\Omega s_1$

3. *Si existe* $E \subseteq \Omega \quad m(E) = 0$, *tal que* $s_1(x) \leq s_2(x)$ *para todo* $x \in \Omega - E$, *entonces*
$$\int_\Omega s_1 \leq \int_\Omega s_2$$

***Demostración*** Ver (Adams y Fournier, 2003)
Se concluye la sección definiendo la integral de Lebesgue para funciones no negativas.

**Definición 1.33** *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible, con* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \Omega$. *Se definine la integral de f en* $\Omega$ *así: (Brezis, 1984).*
$$\int_\Omega f = \sup\left\{\int_\Omega s : s \quad funcion \quad simple \quad 0 \leq s \leq f\right\}$$

**Definición 1.34** *Definimos la parte positiva* $f^+$ *y la parte negativa* $f^-$ *de una* $f$ *así:*
$$f^+(x) = max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = max\{0, -f(x)\}$$
*Así,* $f = f^+ - f^-$ *, donde* $f^+ \quad y \quad f^-$ *son funciones no negativas.*

Podemos ahora definir la integral de Lebesgue para una función $f$ arbitraria .

**Definición 1.35** *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \Omega \in M \quad y \quad f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible, se define la integral de* $f$ *en* $\Omega$ *por:*
$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-$$
*Se dice que la función* $u$ *definida en casi todas partes (ctp) en* $\Omega$ *se llamada localmente integrable en* $\Omega$ *siempre que* $u \in L^1(U)$ *para cada abierto* $U \Subset \Omega$, *se denotará como* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

**Observación 1.6** *Si las integrales de* $f^+$ *y* $f^-$ *son ambas* $\infty$ *no tiene sentido la expresión* $\infty - \infty$. *Decimos en este caso que la función* $f$ *no es integrable.*

**Definición 1.36** *(**Integral de un Subconjunto**). Sea* $H \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible, se define la integral de* $f$ *en* $H$ *por:*
$$\int_H f(x)dx = \int_\Omega f\chi H$$

**Teorema 1.16** *(**Propiedades Básicas de la Integral**). Sean* $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones medibles. Entonces:*

*(a) (Lineal) Sea* $c \in \mathbb{R}$,
$$\int_\Omega c(f+g)(x)dx = c\int_\Omega f(x)dx + c\int_\Omega g(x)dx$$

*(b) (Monotoná) Sea* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in \Omega$
$$\int_\Omega f(x)dx \leq \int_\Omega g(x)dx$$

*(c)* $|f|$ *es medible y*

$$\left|\int_\Omega f(x)dx\right| \leq \int_\Omega |f|(x)dx$$

*(d) Si* $\int_\Omega |f|(x)dx = 0$*, entonces* $f = 0 \quad en \quad casi \quad todas \quad partes$ *(Adams y Fournier, 2003).*

***Demostración*** Ver (Adams y Fournier, 2003)
La diferencia que se puede encontrar con la integral de Riemann y Lebesgue. La integral de Lebesgue utiliza una aproximación por funciones constantes en conjuntos medibles suceptibles de causar dificultades; a diferencia de las integrales superiores e inferiores donde se utiliza solo intervalos.

**Teorema 1.17** *"Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente de funciones medibles no negativos (ampliadas), con lo que* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *es medible y*

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

*para cualquier conjunto medible* $E \subseteq \Omega$*" (Brezis, 1984).*

**Teorema 1.18** ***(Convergencia Monótona - Lema de Fatou)*** *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones integrables no negativas, entonces*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n dx$$

***Demostración*** Ver (Brezis, 1984)

**Teorema 1.19** ***(Convergencia Dominada de Lebesgue)*** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones integrables. Supongamos que:*

*(i)* $f_n(x) \to f(x) \quad c.t.p \quad en \quad \Omega$

*(ii) Existe una función* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n$ *si* $|f(x)| \leq g(x) \quad c.t.p. \quad en \quad \Omega$ *entonces,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

*Ver (Adams y Fournier, 2003).*

***Demostración*** Ver (Adams y Fournier, 2003)

### 1.2.11. Espacio $L^p(\Omega)$

Sea $\Omega$ un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ no vacío y $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a la clase de funciones medibles $u$ definidas en $\Omega$ para lo cual

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

Y su norma de $L^p(\Omega)$ por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Sea el caso $p = \infty$ se definirá:

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \quad medible \quad y \quad |u(x)| \leq M \quad casi \quad siempre \quad en \quad \Omega\}$$

es una norma en $L^\infty(\Omega)$. Así se tiene la siguiente proposición:

**Proposición 1.8** *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p < \infty$*

***Demostración*** Ver (Ambrosetti y Cerami, 1994)

## 1.2.12. Distribuciones

En el resto del trabajo reservamos el símbolo $\Omega$ para denotar un conjunto abierto Euclidiano $\mathbb{R}^n$ y $\phi$ para designar un conjunto vacío.

Un punto de $\mathbb{R}^n$ se denotará por $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $x_i \in \mathbb{R}$, para cada $1 \leq i \leq n$.

**Definición 1.37** *A la n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ la llamaremos multi-índices si $\alpha$ es la n-upla de números enteros no negativos. Además, denotaremos por $X^\alpha$ el monomio $(x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n})$ de grado $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, la suma de dos multi-índices, $\alpha$, $\beta$ es:*

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$$

*Decimos que $\beta \leq \alpha$ si $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, 2, ..., n$. Para denotar la derivada parcial haremos*

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} . \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} . D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

*conviniendo que $D^{(0,0,\cdots,0)}\phi = \phi$*

*Por otra parte, el gradiente de una función de valores reales $\phi$ será denotado por:*

$$D\phi(x) := (D_1\phi(x), D_2\phi(x), \cdots, D_n\phi(c))$$

**Definición 1.38** *Sea $\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada. El soporte de $u$ es el conjunto que se define de la siguiente manera:*

$$sop(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$$

**Proposición 1.9** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se considera $\{w_i\}_{i\geq 1}, w_i \subseteq \Omega$ es un abierto para cada $i$ tal que $f \equiv 0$ c.s. en $w_i$*
*Se define: $w = \bigcup_{i \in I} w_i$ Entonces $f \equiv 0$ c.s. en $w$.*
*Sean $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ funciones con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$*
*Entonces:*

*(a)* $sop(u+v) \subseteq sop(u) \cup sop(v)$

*(b)* $sop(uv) \subseteq sop(u) \cap sop(v)$

*(c)* $sop(\lambda u) = sop(u)$

Así mismo se define:

$$C_0^\infty = \{u : \Omega \in \mathbb{R}/u \in C^\infty(\Omega) \quad con \quad sop(u) \quad compacto \subseteq \Omega\}$$

Los elementos de $C_0^\infty$ se denominan funciones de prueba.

**Proposición 1.10** *El espacio $D(\Omega)$, es denso en $L^p(\Omega), \forall 1 \leq p < \infty$ es decir*

$$\overline{D(\Omega)} = L^p(\Omega), \; para \; todo \; 1 \leq p < \infty$$

Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^n$, una sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ es llamada convergente en el sentido del espacio $D(\Omega)$ a la función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si cumple las siguientes propiedades:

(I) Existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sop(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada $j$.

(II) $\lim\limits_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x)$ uniformemente en $K$ para cada multi-índice en $\alpha$.

El espacio dual $D'(\Omega)$ de $D(\Omega)$ es llamado **espacio de Schwartz**. Los elementos de este espacio son llamados distribuciones. Este espacio es dotado con la topología débil estrella, así que una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T \in D'(\Omega)$ si $T_n(\phi) \to T(\phi)$ para todo $\phi \in D(\Omega)$. En este caso se dice que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $T$ en el sentido distribucional.
Para $S, T \in D'(\Omega) \quad y \quad c \in \mathbb{R}$, entonces se define las siguientes operaciones:

- $(S+T)(\phi) = S(\phi) + T(\phi)$ para cada $\phi \in D(\Omega)$
- $(cT)(\phi) = cT(\phi)$, para cada $\phi \in D(\Omega)$

***Ejemplo*** Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. El funcional

$$T_u(\phi) := \int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,dx, \quad \phi \in D(\Omega)$$

será distribución.

Sean $\phi_1, \phi_2 \in D(\Omega) \quad y \quad \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_u(\phi_1 + \beta\phi_2) &= \int_\Omega u(x)(\phi_1 + \beta\phi_2)(x)\,dx \\ &= \int_\Omega u(x)(\phi_1(x) + \beta\phi_2(x))\,dx \\ &= \int_\Omega u(x)\,\phi_1(x)\,dx + \beta \int_\Omega u(x)\,\phi_2(x)\,dx \\ &= T_u(\phi_1) + \beta T_u(\phi_2) \end{aligned}$$

En consecuencia se comprueba que $T_u$ es lineal.

### 1.2.13. Derivada de una Distribución

**Definición 1.39** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $T \in D'(\Omega)$ una distribución. Dado un multi-índice $\alpha$ definimos la $\alpha$-ésima derivada de $T$ como:*

$$(D^{\alpha}T(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi), \quad \forall\, \phi \in D(\Omega)$$

*(Brezis, 1984)*

**Proposición 1.11** *$D^{\alpha}T$ es una distribución, $\forall\, T \in D'(\Omega)$*

**Demostración:**

$$Sea\ \phi_1, \phi_2 \in D(\Omega) \quad y \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}T(\phi_1 + \beta\phi_2) &= (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}(\phi_1 + \beta\phi_2)) \\
&= (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi_1 + \beta D^{\alpha}\phi_2) \\
&= (-1)^{|\alpha|}\left[T(D^{\alpha}\phi_1) + \beta T(D^{\alpha}\phi_2)\right] \\
&= (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi_1) + \beta(-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi_2) \\
&= D^{\alpha}T(\phi_1) + \beta D^{\alpha}T(\phi_2)
\end{aligned}$$

(Brezis, 1984)

Una vez verificado la linealidad, se procederá a comprobar la continuidad, para ello se considerá $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $D(\Omega)$.

Entonces $(\phi_j - \phi) \in D(\Omega)$
$D^{\alpha}(\phi_j - \phi) \in D(\Omega)$ y existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sop(\phi_j - \phi) \subset \mathbb{K}$ para todo $j$ y luego demostrar $D^{\alpha}T(\phi_j) \to D^{\alpha}T(\phi)$.

**Definición 1.40** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\alpha$ un multi-índice. Si existe una función $v_{\alpha} \in L^1_{loc}$ de tal manera que:*

$$T_{v_{\alpha}}(\phi) = D^{\alpha}T_u(\phi) \quad \forall \quad \phi \in D(\Omega)$$

*entonces $v_{\alpha}$ es llamada la $\alpha$-ésima distribucional o débil de $T_u$.*

***Ejemplo***

1) Si $0 \in \Omega \quad y \quad \delta \in D^{'}(\Omega)$ es la distribución de Dirac entonces, $D^{\alpha}\delta$ viene dada por:

$$D^{\alpha}\delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(0)$$

2) Si $\Omega = \mathbb{R} \quad y \quad H \in L^1_{loc}(\Omega)$ es una función escalonada definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & para \quad x \geq 0 \\ 0, & para \quad x < 0 \end{cases}$$

Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$ con soporte compacto en $[-a; a] \quad entonces:$

$$\begin{aligned}
(TH)^{'}\phi &= (-1)^{|1|}TH(\phi)^{'} \\
&= -TH(\phi)^{'} \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi^{'}(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{a} H(x)\phi^{'}(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{0} H(x)\phi^{'}(x)\,dx - \int_{0}^{a} H(x)\phi^{'}(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} H(x)\phi^{'}(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} \phi^{'}(x)\,dx \\
&= -\phi(x)\Big|_{0}^{a} \\
&= -(\phi(a) - \phi(0)) \\
&= \phi(0) = \delta(\phi)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(TH)^{'}$ es la distribución de Dirac por lo cuál $(TH)^{'}$ es una distribución (Barahona M., 2018).

### 1.2.14. Espacios de Sóbolev

Estos espacios fueron descubiertos por el matemático Serguéi Sóbolev en 1930, tiene una gran influencia sobre el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, el análisis, la física, geometría diferencial y otras ramas de la matemática.

Toda función $u \in L^p(\Omega)$ posee derivadas distribucionales de todos los órdenes, donde las derivadas de $u$ no siempre pertenecen al espacio $L^p(\Omega)$, eso llevó a Serguéi Sobolev en 1936, a idealizar una nueva clase de espacios vectoriales llamados **Espacios de Sobolev**. A continuación introducimos los espacios de Sóbolev de orden entero y establecemos algunas de sus más importantes propiedades (Manuel, 2000).

**Definición 1.41** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Si $m$ es un entero no negativo, $u \in L^p(\Omega)$ y existe la derivada distribucional $D^\alpha u$ para cualquier $\alpha$ con $0 \leq |\alpha| \leq m$, tal que:*

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall \quad |\alpha| \leq m$$

*Entonces se dice que $u \in W^{m,p}(\Omega)$.*

$W^{m,p}(\Omega)$ *es llamado* ***Espacio de Sóbolev sobre*** $\Omega$

En este espacio se define el funcional

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad si \quad 1 \leq p < \infty$$

que es una norma.

**En efecto**:

Es evidente que $\|u\|_{m,p} \geq 0$, además si $\|u\|_{m,p} = 0$ implica que $\left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$, y en consecuencia $\|D^\alpha u\|_p^p = 0$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$. Un caso particular para $\alpha = 0$ se tiene:

$$\|D^\alpha u\|_p^p = \|D^0 u\|_p^p = \|u\|_p^p = 0$$

de donde se obtiene $u = 0$.

La homogeneidad del funcional se verifica, dado que la derivada y la norma satisfacen dicha propiedad:

$$\begin{aligned}
\|\beta u\|_{m,p} &= \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha (\beta u)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\beta D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |\beta|^p \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\beta| \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D\|^\alpha u_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\beta| \, \|u\|_{m,p}
\end{aligned}$$

y para finalizar, la desigualdad de Holder, nos garantiza que el funcional satisface la desigualdad triángular:

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_{m,p} &= \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha (u + v)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{m,p} + \|v\|_{m,p}
\end{aligned}$$

**Teorema 1.20** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $k \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$.*

*Se tiene:*

*(a) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \in (1, \infty)$.*

*(b) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1, \infty)$.*

***Demostración*** Ver (Adams y Fournier, 2003)

***Observación*** Los espacios que se menciona $W^{k,1}(\Omega) \quad y \quad W^{k,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos.

**Definición 1.42** *Sea $k \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir:*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \equiv \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

*Cuando $p = 2$, se denota como $H_0^k(\Omega) \equiv W_0^{k,2}(\Omega)$.*

***Observación***

1. Observe que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{\varphi_v\}_{v\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ tal que $\varphi_v \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$, esto es, existe $(\varphi_v)_{v\in\mathbb{N}}$, tal que $D^\alpha \varphi_v \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$.

2. Utilizando la convolución con una sucesión regularizante, podemos comprobar que $C_0^k(\Omega) \subseteq W_0^{k,p}(\Omega)$ para todo $k \geq 1, p \in [1, \infty)$.

Se mencionará algunas propiedades:

a) El espacio de Sobolev $W^{o,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega), \quad si \quad m \geq k.$

c) $C^m(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$.

d) $C^\infty\overline{\Omega} \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$.

Esta última propiedad permite definir un subespacio de clases de equivalencia de funciones que se anulan sobre la frontera.

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{W^{m,p}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)} \simeq \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

***Nota***:
Cuando $m = 1, p = 2$, se tiene: $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall |\alpha| \leq m\}$$

**Observación 1.7** *Sea $\Omega$ un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, de forma análoga el caso de $W_0^{m,p}(\Omega)$ se define*

$$H_0^m(\Omega) = \overline{H^m(\Omega) \cap C_0^\infty} \ \wedge \ W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m}}$$

**Para** *$p = 2$, se tiene:*

$$W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$
$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)/u(0) = u(1) = 0\}$$

*donde:*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega); \quad \forall |\alpha| \leq m\}$$

### 1.2.15. Inmersiones de Sobolev

**Teorema 1.21** *(Teorema de Sobolev) Sean $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces:*

1. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$; $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$*
2. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$; $q \in [p, \infty)$*
3. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ entonces $W^{m,p} \subset L^\infty(\Omega)$*
   *siendo continua las anteriores inmersiones.*

**Observación 1.8** *Las siguientes observaciones son de importancia para las inmersiones de Sobolev.*

1. *$(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_p)$ es un espacio de Banach.*
2. *Si $p = 2$ el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert con producto interno dado por:*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}; u, v \in W^{m,2}(\Omega)$$

3. *Se denota $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$*

### 1.2.16. El Espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$

**Definición 1.43** *Definimos al espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$ esto es:*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

**Observación 1.9** *Se mencionará algunas observaciones importantes:*

1. *Cuando $p = 2$, se escribe $H_0^m(\Omega)$ en vez de $W_0^{m,p}(\Omega)$*
2. *Si $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ entonces la medida de $\mathbb{R}^N \diagdown \overline{(\Omega)}$ se anula.*
3. *$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\Omega)$*

Ver (Sanchez V., 2017)

**Ejemplo 1.2**

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x^2|-1}}; & |x| < 1 \\ 0 \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

$\varphi \in C_0^\infty, \quad sop(\varphi) = \overline{B(0,1)}$

El espacio de distribuciones sobre $\Omega$ es el dual topológico ( y algebraico) de $D(\Omega)$
$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R}/T \quad lineal \quad y \quad continuo\}$

**Ejemplo 1.3** *Consideremos un modelo que ha sido estudiado por varios autores, entre los cuales se mencionará a Chipot - Lovat, Chipot - Rodrigues y Correa - Ferreira - Menezes.*

Sea $\Omega$ un dominio limitado y regular de $\mathbb{R}^N$, $N \leq 1$ y $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada.

El problema:

$$\begin{cases} \text{si } -a\Big(\displaystyle\int_{\Omega} u\Big).\Delta u(x) = f(x,u) \; en \; \Omega \\ \text{si } u = 0 \; en \; \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

aparece en varias situaciones. Por ejemplo, $u$ puede describir la densidad de una población (de bacterias por ejemplo) sujeta a propagación, el coeficiente de difusión $a$ se supone que depende de la población total en el dominio $\Omega$ en vez de depender de la densidad local, es decir, el movimiento de las bacterias es determinado, considerando el estado global del medio.

Aquí el término no local es $a\Big(\displaystyle\int_{\Omega} u\Big)$.

Una generalización del problema 1.1 es:

$$\begin{cases} -a\Big(\|u\|_q^q\Big)\nabla u(x) = f(x,u) \, en \, \Omega \\ u = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

Donde $\|u\|_q^q$ es la norma usual en $L^q(\Omega)$. Ver (Cabada, 2012)

En 1.2, el término no local es:

$$a\Big(\|u\|_q^q\Big) = a\Big(\int_{\Omega} |u|^q\Big)$$

Veamos algunos problemas importantes:

Consideremos el problema de Dirichlet semilineal.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + h(x), \; en \; \Omega \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Sea la siguiente condición:

$$p > \frac{2N}{N+2} \quad si \quad N \geq 2; \quad p > 1 \quad si \quad N = 1 \tag{1.4}$$

Existe una constante $A > 0$ y una función $B \in L^p(\Omega)$ tal que:

$$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x) \tag{1.5}$$

Para casi todo $x \in \Omega$ y $\forall s \in \mathbb{R}$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $b_\epsilon \in L^1(\Omega)$ tal que:

$$F(x,s) \leq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \epsilon s^2 + b_\epsilon(x) \tag{1.6}$$

Para casi todo $x \in \Omega$ y $\forall s \in \mathbb{R}$

Existe un conjunto medible Lebesgue

$\Omega' \subset \Omega \quad con \quad \eta_N(\Omega \backslash \Omega') = 0 \quad \eta > 0$ tales que:

$$E(\Omega', \lambda_1 - \eta) = \bigcap_{x \in \Omega'} \Big\{ s \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \big/ \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda_1 - \eta \Big\} \tag{1.7}$$

tiene densidad positiva en $+\infty$ y $-\infty$

**Teorema 1.22** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado de clase $C^2$. Si $p$ satisface la condición 1.4, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory que satisface la condición 1.5, la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones 1.6 y 1.7.*

*Entonces, para todo $h \in L^p(\Omega)$, existe una función $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ que es solución débil de 1.2. Esta solución minimiza el funcional asociado $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por:*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) - \int_\Omega hu$$

*Para todo $u \in H_0^1(\Omega)$* (*Rojas Bazán, 2016*)

**Ejemplo 1.4** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado de clase $C^2$, $\Lambda_1$ es el primer valor propio de $- \triangle$ en $\Omega$ con condición de Direchlet (homogénea) y $p$ es un número que satisface la condición 1.4.*
*Sea:*

$$g(s) = 1 - sen\Big(\frac{\pi s^2}{2(1+s^2}\Big)$$

*para todo $s \in \mathbb{R}$*

*Se define la función $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:*

$$F(x,s) = \frac{\Lambda_1}{4}s^2 - g(s)s^2$$

*para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$*

*Se verifica que $g \in C^1(\mathbb{R})$. De aquí $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$. Además se cumple que $F(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.*

*Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$\begin{aligned} f(x,s) &= \frac{dF}{ds}(x,s) \\ &= \frac{\lambda_1}{2}s - g'(s)s^2 - 2g(s)s \end{aligned}$$

*para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.*

*Aplicando propiedades de derivación de funciones y regla de la cadena se obtiene:*

$$g'(s) = -\Big[cos\Big(\frac{\pi s^2}{2(1+s^2}\Big)-\Big]\frac{\pi s}{(1+s^2)^2}$$

*para todo $s \in \mathbb{R}$*

*Por el teorema fundamental del cálculo*

$$\int_0^s f(x,t)dt = F(x,s)$$

$\forall x \in \Omega$ y $\forall s \in \mathbb{R}$

*La función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Caratheodory pues $F(x,s) \in C^1(\mathbb{R})$ para cada $x \in \Omega$*

*La función $f$ satisface la condición 1.5 pues existen $A = \frac{1}{2}\lambda_1 + 4 + \frac{\pi}{4} > 0$ y $B \in L^p(\Omega)$ $(B(x) = 0 \quad para \quad todo \quad x \in \Omega)$ tales que:*

*$|f(x,s)| \leq A|s| + B(x)$ para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.*

*La función $F$ satisface la condición 1.6 pues para todo $\epsilon > 0$ existe $b_\epsilon \in L^1(\Omega)$ $(b_\epsilon(x) = 0 \quad para \quad todo \quad x \in \Omega)$ tal que:*

*$F(x,s) \leq \frac{\lambda_1}{2}s^2 + \epsilon s^2 + b_\epsilon(x)$ para todo $x \in \Omega$ y para todo $s \in \mathbb{R}$.*

*La función $F$ satisface la condición 1.7 pues existen $\Omega' = \Omega$ $(\Omega' \quad conjunto \quad medible\, Lebesgue\, incluido\, en\, \Omega$ con $\mu_N(\Omega \backslash \Omega') = \mu_N(\Phi) = 0$ y $\mu = \frac{\lambda_1}{2} > 0$ tal que $E(\Omega', \lambda_1 - \mu)$ es un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}$*

$$\underbrace{liminf}_{r \to +\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega', \lambda_1 - \mu) \cap [0,r])}{\mu_1([0,r])} = 1 > 0$$

$$\underbrace{liminf}_{r \to -\infty} \frac{\mu_1(E(\Omega', \lambda_1 - \mu) \cap [r,0])}{\mu_1([r,0])} = 1 > 0$$

*Es decir $E(\Omega', \lambda_1 - \mu)$ tiene densidad positiva en $+\infty$ y $-\infty$*

*Por lo tanto $f$ y $F$ satisfacen las hipótesis del teorema 1.22. Luego por este teorema, para todo $h \in L^p(\Omega)$ el problema 1.3 tiene por lo menos una solución débil que pertenece a: $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ (Rojas Bazán, 2016)*

## 1.3. Conceptos de Investigación

### 1.3.1. Aplicación de Caratheodory

**Teorema 1.23** ***(Aplicación de Caratheodory)***
*Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo, $I$ es subconjunto cerrado de los números $\mathbb{R}$. Una aplicación $f : I \times E \to E$ es una aplicación de Caratheodory, si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $t \in I$, $f(t,.) : E \to E$ es continua.*

2. *Para todo $x \in E$, $f(.,x) : I \to E$ es medible en el sentido Lebesgue*

### 1.3.2. Teorema de Green

**Teorema 1.24** ***(Teorema de Green)*** *Dado $\Omega$ un espacio abierto, acotado y regular $\mathbb{R}^n$, situado a un mismo lado de su frontera $\partial\Omega$, entonces para todo $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$ tenemos:*

$$\int_\Omega (-\Delta u)\, v\, dx = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, dx - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \eta}\, v\, d\Gamma$$

*Donde $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ designa la derivada normal exterior de $u$, siendo $\overrightarrow{\eta}$ fuera de los vectores unitarios normales a $\partial\Omega$ y $d\Gamma$ es la medida de Lebesgue sobre la superficie $\partial\Omega$*

### 1.3.3. Regularidad de la Solución Débil

**Teorema 1.25** *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *un dominio abierto y acotado de clase* $C^2, 1 < p < \infty$ *y* $f \in L^p(\Omega)$
*Si* $u$ *es solución débil de:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & en \quad \Omega \\ u = 0 & sobre \quad \partial(\Omega) \end{cases}$$

Ver (Agmon, 1959)

### 1.3.4. Teorema de Brower

**Teorema 1.26** *Sea* $G : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)}$ *para* $R > 0$
$\overline{B(0,R)} \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $G$ *una función continua, entonces existe un punto fijo* $\xi_0 \in \overline{B(0,R)}$ *tal que* $G(\xi_0) = \xi_0$

### 1.3.5. Teorema del Ángulo Agudo

**Teorema 1.27** ***(Teorema del Ángulo Agudo)***
*Sea* $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *una función continua.*
*Si existe* $R > 0$ *tal que* $\langle F(x), x \rangle \geq 0, \forall |x|_{R^m} = R$*, entonces existe* $x_0 \in \overline{B(0,R)}$ *tal que* $F(x_0) = 0$.

**Demostración**
*Por el absurdo, supongamos que:* $F(\xi) \neq 0; \forall \xi \in \overline{B(0,R)}$
*Se define:*

$$G : \overline{B(0,R)} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\xi \longrightarrow G(\xi) = -R\frac{F(\xi)}{|F(\xi)|_{R^m}}$$

*Entonces* $G$ *es continua, además:*

$$|G(\xi)| = R\frac{|F(\xi)|}{|F(\xi)|} = R$$

*(quiere decir que los valores de* $G$ *están en la bola)*

*Por lo que:* $G : \overline{B(0,R)} \longrightarrow \overline{B(0,R)}$ *continua.*
*Entonces por el teorema de Brower* $\exists \xi_0 \in \overline{B(0,R)}$ *talque* $G(\xi_0) = \xi_0$ *observe que:* $|\xi_0| = |G(\xi_0| = R > 0$
*Como:*

$$
\begin{aligned}
0 < R^2 &= |\xi_0|^2 \\
&= \langle \xi_0, \xi_0 \rangle \\
&= \langle G(\xi_0), G(\xi_0) \rangle \\
&= \langle -\frac{R}{|F(\xi_0|} F(\xi_0), \xi_0 \rangle \\
&= \frac{-R}{|F(\xi_0)|} \langle F(\xi_0), \xi_0 \rangle \\
&\geq 0 \\
&\Rightarrow 0 < 0 \quad (\longrightarrow\!\longleftarrow) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

### 1.3.6. Desigualdad de Poincaré

**Teorema 1.28** ***(Desigualdad de Poincaré)***
*Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que:*

$$
\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left( \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty
$$

### 1.3.7. Método de Galerkin

**Teorema 1.29** ***(Método de Galerkin)***
*Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de H de* ***dimensión finita*** *tal que:*

*a)* $H_h \subseteq H_{\overline{h}}$ *para todo* $h \geq \overline{h}$

*b)* $\bigcup \{H_h : h > 0\}$ *es denso en H.*

### 1.3.8. Los Espacios $H_0^m$, $H^{-m}$

Sea $\Omega$ abierto de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N} \cup 0$ se define el espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ como:

$$
H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/D^\alpha u \in L^2(\Omega);\, \forall |\alpha| \leq m\}
$$

**Observación 1.10** *Las siguientes observaciones son muy importantes:*

1. $H^m(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$

2. *En $H^m(\Omega)$ se define el producto interno:*

$$
\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha(x) dx \quad \forall u, v \in H^m(\Omega)
$$

*la norma:*

$$
|u|_{H^m(\Omega)} = (u, u)^{1/2} = \big( \sum_{|\alpha|} \leq m |D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)} \big)
$$

*Asi $H^m(\Omega)$ es espacio de Hilbert.*

3. *Los elementos de $H^m(\Omega)$ se llaman clases de equivalencia:*
   $\big(u\, R\, v \leftrightarrow u = v \quad esta \quad en \quad \Omega\big)$

4. *La derivada indicada en la definición está en la derivada de la distribución sobre $\Omega$ es decir:*
   $\exists u_\alpha \in L^2(\Omega)$ *tal que* $\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = \langle u_\alpha, \varphi\rangle; \forall \varphi D(\Omega) s.s.s.(-1)^{|k|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle = \langle u_\alpha, \varphi\rangle$

### 1.3.9. Desigualdad de Hölder

**Teorema 1.30** ***(Desigualdad de Hölder para integrales)***
*Sea $1 < p < \infty$ y $p^*$ exponente conjugado de p.*

*Si $u \in L^p(\Omega)$ entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v(x)|^{p^*}\, dx\right)^{1/p^*}$$

### 1.3.10. Desigualdad de Minkowski

**Teorema 1.31** ***(Desigualdad de Minkowski para Integrales)*** *Al aplicar la desigualdad de Hölder, se obtiene la desigualdad de Minkowski:*

$$\int_\Omega |u(x) + v(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

*Si* $1 \leq p < \infty, \quad u, v \in L^p(\Omega)$

$$u + v \in L^p(\Omega)$$

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

**Demostración** *Sean $u, v \in L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$. La medibilidad de $u + v$ es obvia.*

*La desigualdad es cierta para $p = 1$*

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_1 &= \left(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^1\right)^{1/1} \\
&= \int_\Omega |u(x) + v(x)| dx \\
&\leq \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)\, dx \\
&= \int_\Omega |u(x)| dx + \int_\Omega |v(x)| dx \\
&= \|u\|_1 + \|v\|_1
\end{aligned}$$

*Sea* $1 < p < \infty, \quad 1 < p' < \infty$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

*Consideremos la función $w \in L^p(\Omega)$ tal que $w \geq 0$ y $\|w\|_{p'} \leq 1$.*

*Por la desigualdad de Hölder tenemos:*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)+v(x)|\, w(x)dx &\leq \int_\Omega (|u(x)|+|v(x)|)\, w(x)dx \\ &= \int_\Omega |u(x)|\, w(x)dx + \int_\Omega |v(x)|\, w(x)dx \\ &\leq \|u\|_p \|w\|_{p'} + \|v\|_p \|w\|_{p'} \\ &= \|u\|_p + \|v\|_p\end{aligned}$$

$$sup\left\{\int_\Omega |u(x)+v(x)|\, w(x)dx : \; w(x) \geq 0 \quad en \quad \Omega, \quad \|w\|_{p'} \leq 1\right\} \leq \|u\|_p + \|v\|_{p'}$$

*Por lo tanto:*

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

■ *(Barahona M., 2018)*

## 1.3.11. Teorema de la Convergencia

**Teorema 1.32** ***(Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)*** *Dado$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables. Si se supone:*

*(i)* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *c.t.p. en* $\Omega$

*(ii) Hay una función $g \in L^1(\Omega)$ como para todo $n$ si $|f(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en $\Omega$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

## 1.3.12. Representación de Riez

**Teorema 1.33** ***(Representación de Riez para $L^p(\Omega)$)***
*Sea $1 < p < \infty$, $\quad \varphi \in (L^p(\Omega))' \Longrightarrow \exists! \quad u \in L^{p'}(\Omega)$*
*Tal que:*

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega u(x)f(x)dx; \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

*Además:*

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|'_{(L^p(\Omega))}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad donde \quad q = p'$$

**Demostración**

$$L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))'$$

- $(L^2(\Omega))' = L^2\Omega$
- $(L^3(\Omega))' = L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
T: L^q(\Omega) &\longrightarrow \left(L^p(\Omega)\right)' \\
\mu &\longrightarrow T_\mu \\
L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
f &\longrightarrow \langle T_\mu, f\rangle = \int_\Omega u(x)f(x)dx
\end{aligned}
$$

**Afirmación 1:** *T está bien definida.*

*En efecto:*

$$
\begin{aligned}
|\langle T_\mu, f\rangle| &= \left|\int_\Omega u(x)f(x)dx\right| \leq \int_\Omega |u(x)||f(x)|dx \\
Hlder &\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \underbrace{\|u\|_q}_{<\infty} \underbrace{\|f\|_p}_{<\infty} < \infty
\end{aligned}
$$

*Por lo tanto T está bien definida.* ■

**Afirmación 2:** *T lineal*
*En efecto:*

$$
\langle T_{\alpha u+v}, f\rangle = \int (\alpha u(x) + v(x))f(x) = \langle \alpha T_u + T_v, f\rangle
$$

**Afirmación 3:** *T es acotada*
*En efecto:*

$$
\begin{aligned}
|\langle T_u, f\rangle| &\leq \|u\|_q \|f\|_p \\
&\Longrightarrow \frac{|\langle T_u, f\rangle|}{\|f\|_p} \leq \|u\|_q \\
&\Longrightarrow \sup_{\|u\|\neq 0} \frac{|\langle T_u, f\rangle|}{\|f\|_p} \leq \|u\|_q \\
\|T_u\| &\leq \|u\|_q \\
&\Longrightarrow \frac{\|T_u\|}{\|u\|_q} \leq 1
\end{aligned}
$$

*Otra vez aplicando supremo*

$$
\begin{aligned}
\sup_{\|u\|\neq 0} \frac{\|T_u\|}{\|u\|_q} &\leq 1 \\
\|T\| &\leq 1
\end{aligned}
$$

*Por lo tanto T es aotada.* ■

**Afirmación 4:** *T isometría*

$$
\|T_u\| = \|u\|
$$

*En efecto:*
*Considerar* $f_0(x) = |u(x)|^{q-2}u(x); \quad u \in L^q(\Omega)$

$$\Longrightarrow |f_0(x)|^p = ||u(x)|^{q-2}u(x)|^p$$
$$\Longrightarrow |f_0(x)|^p = |u(x)|^{(q-1)p}$$

*En efecto:*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\\
\Longrightarrow &\frac{q}{p} + 1 = q\\
\Longrightarrow &\frac{q}{p} = q - 1\\
\Longrightarrow &q = (q-1)p\\
\Longrightarrow &|f_0(x)|^p = |u(x)|^q\\
\Longrightarrow &\int_\Omega |f_0(x)|^p dx = \int_\Omega |u(x)|^q dx < \infty\\
\Longrightarrow &f_0 \in L^p(\Omega)
\end{aligned}$$

*En efecto:*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |f_0(x)|^p = \int_\Omega |u(x)|^q dx\\
\Longrightarrow &\|f_0\|_p^p = \|u\|_q^q\\
\Longrightarrow &\|f_0\|_p = \|u\|_q^{\frac{q}{p}} = \|u\|_q^{q-1}\\
\Longrightarrow &\|f_0\|_p = \|u\|_q^{q-1}
\end{aligned}$$

*Sabemos que:*

$$\begin{aligned}
\langle T_u, f_0\rangle &= \int_\Omega u(x)f_0(x)dx = \int_\Omega u(x)|u(x)|^{q-2}u(x)dx\\
\Longrightarrow \langle T_u, f_0\rangle &= \int_\Omega |u(x)|^q dx = \|u\|_q^q\\
\Longrightarrow \langle T_u, f_0\rangle &= \|u\|_q^q\\
\|T_u\| &= \sup_{\|w\|\neq 0} \frac{|\langle T_u, w\rangle|}{\|w\|} \geqslant \frac{|\langle T_u, w\rangle|}{\|w\|} = \frac{|\langle T_u, f_0\rangle|}{\|f_0\|}\\
\|T_u\| &= \frac{|\langle T_u, f_0\rangle|}{\|f_0\|} = \frac{\|u\|_q^q}{\|u\|_q^{q-1}} = \|u\|_q\\
\longrightarrow \|T_u\| &\geqslant \|u\|_q
\end{aligned}$$

*Se tiene que:*

$$\|T_u\| = \|u\|$$

*Por lo tanto T es una isometría entonces es inyectiva.*

$$T : L^q(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))'$$

*En efecto:*
$$\langle T_{\alpha u+v}, f\rangle = \int (\alpha u(x) + v(x))\, f(x) = \langle \alpha T_u + T_v, f\rangle$$

**Afirmación 5:** *T es suryectiva*
$$T : L^q(\Omega) \longrightarrow \left(L^p(\Omega)\right)^{'}$$

*Por demostrar*
$$T\left(L^q(\Omega)\right) = \left(L^p(\Omega)\right)^{'}$$

***Corolario 1.4*** *$X$ un espacio vectorial, $B \subseteq X$.*
*Sea$f \in X^{'}$ tal que: $\langle f, x\rangle = 0; \quad \forall x \in B$*
*Si $f = 0 \quad entonces \quad \overline{B} = X$*

*Considero: $B = T\left(L^q(\Omega)\right); \quad X = \left(L^p(\Omega)\right)^{'}$*
*Lo que se pretende demostrar es:*
$$\overline{T\left(L^q(\Omega)\right)} = \left(L^p(\Omega)\right)^{'}$$

**Afirmación 5.1**
$$T\left(L^p(\Omega)\right) \quad es \quad cerrado \quad es \quad decir \quad \overline{T\left(L^q(\Omega)\right)} = T\left(L^q(\Omega)\right)$$

*En efecto :*
$$\overline{T\left(L^q(\Omega)\right)} \subseteq T\left(L^q(\Omega)\right)$$

***Proposición 1.12*** *Si $x \in \overline{A}$ si y sólo si $\exists (x_n) \subseteq A \quad / \quad x_n \longrightarrow x$*

***Corolario 1.5*** *$A$ es cerrado si y sólo si $(x_n) \subseteq A; \quad x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x \in A$*

*Considero: $A = T\left(L^q(\Omega)\right)$*
*Sea $(x_n) \subseteq L^q(\Omega)$ de modo que $T(x_n)_{n\geq 1} \subseteq T\left(L^q(\Omega)\right)$ tal que $T(x_n) \longrightarrow Y$*
*Solo falta probar que:*
$$y \in T\left(L^q(\Omega)\right)$$

*Como $(T(x_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente $\longrightarrow (T(x_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.*
*Para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que: $\|T(x_n) - T(x_m)\| \longrightarrow 0$*

*Como $T$ es una isometría $\Rightarrow \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$*

*Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $L^q(\Omega)$*

*Como $L^q(\Omega)$ es un espacio completo entonces $x_n \longrightarrow x$ en $L^q(\Omega)$*

*Como T es una función continua entonces $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ en $\left(L^p(\Omega)\right)^{'}$*

*Luego por la unicidad del limite se tiene que $y = T(x)$*

*Entonces* $y \in T\left(L^q(\Omega)\right)$ *por el corolario* $T\left(L^q(\Omega)\right)$ *es cerrado, es decir:*

$$T\left(L^q(\Omega)\right) = \left(T(L^q(\Omega))\right)$$

**Afirmación 5.2**

$$T\left(L^q(\Omega)\right) = \overline{T(L^q(\Omega))} = \left(L^p(\Omega)\right)^{'}$$

*Usando corolario, sea* $X = \left(L^p(\Omega)\right)^{'}, \quad B = T(L^q(\Omega))$
*Considerar:*

$$h \in \left(\left(L^p(\Omega)\right)^{'}\right)^{'} = L^p(\Omega) \quad talque \quad \langle T_u, h\rangle = 0$$

$\Longrightarrow 0 = \displaystyle\int_\Omega u(x)h(x)dx$ *consideremos un caso particular* $u(x) = |h(x)|^{p-2}h(x)$

$0 = \displaystyle\int_\Omega |h(x)|^p dx = \|h\|_p \Longrightarrow h \equiv 0$

$T\left(L^q(\Omega)\right) = \overline{L\left(L^q(\Omega)\right)} = \left(L^p(\Omega)\right)^{'}$

$T\left(L^q(\Omega)\right) = \left(L^p(\Omega)\right)^{'}$
*Por lo tanto T es suryectiva*

*Finalmente podemos identificar como cosecuencia del teorema de que:*

$$L^q(\Omega) \approx \left(L^p(\Omega)\right)^{'} \quad \blacksquare$$

CAPÍTULO 2

# METODOLOGÍA

Con respecto al método de trabajo es una investigación básica (teórica), según Muñoz, C. (2011), su investigación parte de un marco teórico y permanece en él, la finalidad radica en incrementar los conocimientos científicos, pero sin contrastarlos con ningún aspecto teórico (p. 93).

## 2.1. Tipo de Investigación

Por su naturaleza del problema y los objetivos enunciados, reune condiciones para ser calificado como una investigación explicativa.

Según Llanos (2011) en su obra cuyo titulo es Clases y Tipos de Investigación y sus Características, sostiene que: Es una justificación que puede ser: encontrar, fijar e interpretar las relaciones causalmente funcionales que existen con las variables estudiadas y sirve para interpretar cómo, cuándo, dónde y por qué ocurre un fenómeno (p. 22).

## 2.2. Diseño de Investigación

El diseño de investigación utilizado en el presente trabajo, es de tipo cualitativo (descriptivo - demostrativo).

Los autores Guffante, Guffante y Chavez, (2016) afirman que: La investigación se inicia de la exploración o teorías para formular hipótesis que se verifican o niegan mediante la validación reiterada del comportamiento de componentes de fenómenos. (p. 87).

## 2.3. Nivel de Investigación

El trabajo de investigación tiene un nivel de investigación correlacional.

Los autores Guffante, Guffante y Chavez (2016), sostienen lo siguiente: Asocia variables mediante un patrón predecible, permite conocer la relación que existe entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto particular (p. 85).

## 2.4. Enfoque de Investigación

El enfoque de investigación para el presente trabajo es el enfoque cualitativo.

Hernandez (2014), manifiesta que el investigador o investigadora plantea un problema de estudio delimitado y concreto sobre el fenómeno, aunque sus preguntas de investigación versan sobre cuestiones específicas (p. 5).

## 2.5. Método de Investigación

El método de investigación es inductivo - deductivo.

Los autores Guffante, Guffante y Chavez (2016), sostienen que: El método inductivo - deductivo, inicia de la hipótesis que verifica o contradice para inferir resultados (p. 90). Y según el punto de partida es sintético de donde afirman que: "De la reunión racional de varios elementos o partes dispersas se trata de construir un nuevo todo, formulando de ser necesario teorías o leyes"(p. 92).

# RESULTADOS Y DISCUSIONES

## 3.1. Existencia de Solución para $\Omega$ Acotado

En el siguiente teorema consideremos una función positiva y acotada de tal manera que se va a usar una extensión de la función a todo $\mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(0)$, para $t < 0$ y se denotará a la extensión con la misma función.

**Teorema 3.1** *Supongamos que:*

$$f(t) \geq k_0 > 0, \forall t \in [0, \infty\rangle$$

$$f(t) < k_\infty, \forall t \in [0, \infty\rangle$$

*Donde $k_0$ y $k_\infty$ son constantes reales.*

*Entonces para cualquier número real $\alpha$ y $\beta$, el problema 3.1. Obs. (ver abajo) posee una solución débil positiva.*

*Un bosquejo de la gráfica de la función*

$$0 < k_0 \leq f(t) < k_\infty \quad \forall t \in [0, +\infty\rangle \quad f(t) = f(0), \quad t < 0$$

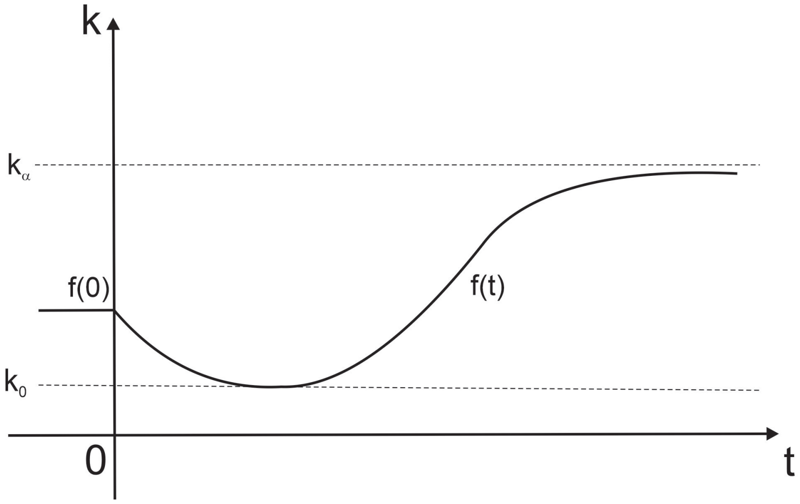


Figura 3.1: Gráfica 1

*Consideremos el problema con una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$\left| \begin{array}{l} -\left( \int_\Omega f(u(x))dx \right)^\beta \Delta u = f(u(x))^\alpha \textit{ en } \Omega \\ u = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.1}$$

*Para un función dada $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$*

Queremos probar la existencia de la solución débil del problema 3.1 y determinar la regularidad de esta solución. Por lo que empezamos deduciendo formalmente el concepto de solución débil de 3.1.

**(I)Formulación Variacional**

Multiplicamos a la ecuación 3.1 por $\varphi$ suficientemente regular e integramos sobre $\Omega$

$$\left( \int_\Omega f(u(x))\, dx \right)^\beta \int_\Omega (-\Delta u(x))\, \varphi(x)\, dx = \int_\Omega (f(u(x)))^\alpha\, \varphi(x)\, dx$$

$$x \in\ \Omega,\ \varphi \in\ H_0^1\,(\Omega)$$

Usando el teorema de Green se tiene:

$$\left( \int_\Omega f(u(x))dx \right)^\beta \left[ \int_\Omega \nabla u(x) \nabla\varphi(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial\gamma}\varphi(x)d(\Gamma) \right] = \int_\Omega (f(u(x)))^\alpha \varphi(x)dx$$

Con la condición de frontera $\varphi|_\Gamma = 0$ esto es $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial\gamma}\varphi(x)d(\Gamma) = 0$

Luego tenemos:

$$\left( \int_\Omega f(u(x))\, dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u(x) \nabla\varphi(x)\, dx = \int_\Omega (f(u(x)))^\alpha \varphi(x)\, dx \tag{3.2}$$

Lo que permite dar la siguiente definición.

**(II) Solución Débil**

**Definición 3.1** *Decimos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es solución débil de 3.2 si satisface:*

*(i)* $u \in H_0^1(\Omega)$

*(ii)* $u$ *satisface*

$$\left( \int_\Omega f(u(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u(x) \nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega (f(u(x)))^\alpha \varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in H_0^1\Omega \tag{3.3}$$

*Note que para $u \in H_0^1(\Omega)$ todos los elementos en el anterior sistema está bien definido.*

**a) Buena Definición**

**Observación 3.1** *Los términos de 3.3 tienen sentido (buena definición) para $u,\ \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Veamos que los términos de la ecuación sea finito, para ello basta demostrar que cada uno de los términos sea finito.*

Veamos que esta definición es consistente, esto es

$$\left(\int_\Omega f(u(x))dx\right)^\beta,\ \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx\ ,\ \int_\Omega (f(u(x)))^\alpha \varphi(x)dx \text{ son finitos.}$$

**Afirmación**

**a)** $\left(\int_\Omega f(u(x))dx\right)^\beta$ es finito.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\int_\Omega f(u(x))dx\right)^\beta\right| &\leq \int_\Omega f(u(x))dx < \int_\Omega k_\infty dx \\
&= \left(\int_\Omega f(u(x))dx\right)^\beta < \left(\int_\Omega k_\infty dx\right)^\beta \\
&= \left|\left(\int_\Omega k_\infty dx\right)^\beta\right| \\
&= \left|(k_\infty)^\beta \left(\int_\Omega dx\right)^\beta\right| \\
&= (k_\infty)^\beta |\Omega|^\beta < \infty \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Pues $0 < k_0 \leq f(u(x)) < k_\infty,\ u(x) \in \mathbb{R}$

Teniendo en cuenta que se cumple que la función potencia $t \ \to\ t^\beta,\ \beta \geq 0$ es continua.

$$\left|\left(\int_\Omega f(u(x))dx\right)^\beta\right| < \infty$$

**Afirmación**

**b)** $\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx$ es finito.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla\varphi(x)\ dx\right| &\leq \int_\Omega |\nabla u(x)\nabla\varphi(x)|dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla\varphi(x)|dx \\
&\leq |\nabla u|_2|\nabla\varphi|_2 \\
&= \underbrace{|u|_{H_0^1}}_{<\infty}\underbrace{|\varphi|_{H_0^1}}_{<\infty}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\left|\int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla\varphi(x)\ dx\right| < \infty \quad \blacksquare$$

para $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$

**Afirmación**

**c)** $\int_\Omega (f(u(x)))^\alpha \varphi(x)dx$ es finito.

En efecto:

$$0 < f(u(x)) < k_\infty$$

Se sabe que:

$$0 < f(u(x)) < k_\infty$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad 0 < (f(u(x)))^\alpha < (k_\infty)^\alpha, \alpha \geq 0 \\
&\Longrightarrow \quad \Big|(f(u(x)))^\alpha\Big|\ \Big|\varphi(x)\Big| < \Big|(k_\infty)^\alpha\Big|\ \Big|\varphi(x)\Big| \\
&\Longrightarrow \quad \left|\int_\Omega (f(u(x)))^\alpha\varphi(x)dx\right| \leq \int_\Omega \Big|(f(u(x)))^\alpha\Big|\ \Big|\varphi(x)\Big|dx \\
&\leq \quad \int_\Omega \Big|(k_\infty)^\alpha\Big|\ \Big|\varphi(x)\Big|dx \\
&\leq \quad |(k_\infty)^\alpha| \int_\Omega |\varphi(x)|dx \\
&\leq \quad (k_\infty)^\alpha \left(\int_\Omega 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} (Hlder); \quad (K_\infty > 0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k_\infty^\alpha \, |\Omega|^{1/2} \, |\varphi|_2 \\
&\leq k_\infty^\alpha \, |\Omega|^{1/2} \, c^* \, |\nabla\varphi|_2, \ (Desigualdad\ de\ Poincare) \\
&= k_\infty^\alpha \, |\Omega|^{1/2} \, c^* \, \|\varphi\|_{H_0^1} < \infty \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
\left| \int_\Omega (f(u(x)))^\alpha \varphi(x) dx \right| < \infty \tag{3.4}
$$

debido a que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y $\Omega$ acotado.

Sea a demostrado **(a) , (b) y (c)**

**b) Método de Galerkin** Para probar la existencia de la solución débil de 3.2, se usará el método de Galerkin.

Como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable entonces tiene una base hilbertiana $\{w_v\}_{v\geq 1}$ tal que:

(i) $(w_i, w_j) = 0\,;\, i \neq j$

(ii) $\|w_i\| = 1$

Denotamos para cada $m \in \mathbb{N}$

$V_m = gen[w_1, w_2, \cdots, w_n] \equiv [w_1, w_2, \cdots, w_n] \subseteq H_0^1(\Omega)$

Sea $u \in V_m\,;\, u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, w_i$

Definamos

$$
\begin{aligned}
\Phi : V_m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\
u &\rightarrow \Phi(u) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)
\end{aligned}
$$

Resulta que $\Phi$ es un isomorfismo isométrico, ya que:

a) $\Phi$ es una transformación lineal, suryectiva.

b) $\|u\|^2_{H_0^1}(\Omega) = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}$ donde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$

Probemos cada caso

**Afirmación**

**a)** Sea $u = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, w_i$, $v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \, w_i$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha u+\beta v) &= \Phi\left(\alpha\sum_{i=1}^{m}\xi_i\, w_i+\beta\sum_{i=1}^{m}\eta_i\, w_i\right)=\Phi\left(\sum_{i=1}^{m}(\alpha\xi_i+\beta\eta_j)w_i\right)\\
&= (\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\alpha\xi_2+\beta\eta_2,\cdots,\alpha\xi_n+\beta\eta_n\\
&= (\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n)+(\alpha\eta_1,\alpha\eta_2,\cdots,\alpha\eta_n)\\
&= \alpha(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)+\beta(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\\
&= \alpha\Phi(u)+\beta\Phi(v) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Además para $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^m$, $\exists u=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i\in V_m\ \Phi(u)=\xi$.

**b)** Sea $u\in V_m$

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H_0^1}(\Omega) &= \int_\Omega|\nabla u|^2dx=(u,u)=\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i,\sum_{j=1}^{m}\xi_j w_j\right)_{H_0^1}(\Omega)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\xi_i\left(w_i,\sum_{j=1}^{m}\xi_j w_j\right]\\
&= \sum_{i=1}^{m}\xi_i\left[\sum_{j=1}^{m}\xi_j(w_i,w_j)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{m}\xi_i[\xi_1(w_i,w_1)+\xi_2(w_i,w_2)+\cdots+\xi_i(w_i,w_i)+\cdots+\xi_m(w_i,w_m)]\\
&= \sum_{i=1}^{m}\xi_i.\xi_i=\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2=\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^m} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

donde $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$. Entonces tenemos $\|u\|^2_{H_0^1}(\Omega)=\|\xi\|_{\mathbb{R}^m}$

De **a)** y **b)** $\Phi$ es un isomorfismo isométrico. Así identificamos que $u\equiv\xi$.

Nuestro objetivo es encontrar $u=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i\in V_m$ que verifique el sistema aproximado:

$$(S.A)\left|\left(\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta\int_\Omega\nabla u_m(x)\ \nabla w_i(x)\ dx=\int_\Omega(f(u_m(x)))^\alpha\ w_i(x)dx\right.$$

para cada $i=1,2,\cdots,m$

Que es un sistema de $m$ ecuaciones no lineales con indeterminadas $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ números reales.

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, w_i \ \in V_m \subseteq H_0^1(\Omega)$$

Explicitamente para cada $i = 1, 2, \cdots, m$ se tiene que el sistema aproximado es:

$$(S.A.) \left| \begin{array}{l} \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla w_1(x) dx = \int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_1(x) dx \\ \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla w_2(x) dx = \int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_2(x) dx \\ \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla w_3(x) dx = \int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_3(x) dx \\ \vdots \\ \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla w_m(x) dx = \int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_m(x) dx \end{array} \right.$$

**Observación 3.2** *Como* $(V_m, \|\|)$ *y* $(\mathbb{R}^m, ||)$ *tienen dimensión* $m$*, luego ambos espacios son Isomorfos e Isométricos.*

*Donde* $\|.\|$ *norma usual en* $H_0^1(\Omega)$, $|.|$ *norma Euclidiana de* $\mathbb{R}^m$ *y* $\langle ., . \rangle$ *es el producto interno de* $\mathbb{R}^m$*.*

*Usaremos la identificación:*

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i \longleftrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_m)$$

*Como* $V_m$, $\mathbb{R}^m$ *son conjuntos de dimensión finita, entonces* $V_m \equiv \mathbb{R}^m$

*También:*

$$\|u_m\|_{H_0^1} = |u_m|_{V_m} = |\xi|_{\mathbb{R}^m}$$

*Donde* $F_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *son las funciones componentes tal que:*

$$\begin{array}{ll} F : V_m \equiv \mathbb{R}^m & \to \mathbb{R}^m \\ \qquad \xi & \to F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), F_3(\xi), \cdots, F_m(\xi)) \end{array}$$

***Afirmación I***

$$F_i(\xi) = \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \ \nabla w_i(x) dx \ - \int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_i(x) dx$$

*para* $i = 1, 2, 3, \cdots, m$

*Se verifica que* $F_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *son continuas y por lo tanto* $F$ *es continua.*

**En efecto**

**a)** Sea $F$ continua, donde $F$ es una función vectorial $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$

Con $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Consideremos la sucesión $(\xi_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^m$ $y$ $\xi_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\xi_k \to \xi_0 \; cuando \; k \to \infty$$

Si la sucesión $(F(\xi_k))_{k\geq 1}$ es tal que $F(\xi_k) \to F(\xi_0), \; cuando \; k \to \infty$ entonces F es continua.

Donde $\xi_k = (\xi_1^k, \xi_2^k, \xi_3^k, \cdots, \xi_m^k)$,

$\xi_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \cdots, \xi_m^0) \in \mathbb{R}^m \; fijo.$ ■

Luego, F es continua en $\xi_0$ si, y sólo si las funciones componentes $F_i$ son continuas en $\xi_0, \; para \; cada \; i = 1, 2, 3, \cdots, m$

Es decir

$F_i(\xi_k) \to F_i(\xi_0), \; cuando \; k \to \infty, \; para \; cada \; i = 1, 2, 3, \cdots, m$

**(I)** Definimos:

$$F_i(\xi_k) = \left( \int_\Omega f\left(u_m^{(k)}(x)\right)dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(k)}(x) \nabla w_i(x)dx - \int_\Omega \left( f\left( u_m^{(k)}(x) \right) \right)^\alpha w_i(x)dx$$
$$F_i(\xi_0) = \left( \int_\Omega f\left(u_m^{(0)}(x)\right)dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(0)}(x) \nabla w_i(x)dx - \int_\Omega \left( f\left( u_m^{(0)}(x) \right) \right)^\alpha w_i(x)dx$$
$$u_m^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^m \xi_i^{(k)} w_i(x), \; donde \; \xi_i^{(k)} \in (\xi_k)_{k\geq 1}$$
$$u_m^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^m \xi_i^{(0)} w_i(x)$$
tal que

$$\xi_i^{(0)} \in \xi_0 = \left( \xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_m^{(0)} \right) \in \mathbb{R}^m$$

**Afirmación II**

$(F_i(\xi_k))_{k\geq 1}$ es una sucesión convergente.

**En efecto**

$$
\begin{aligned}
|F_i(\xi_k) - F_i(\xi_0)| &= \Bigg| \left( \int_\Omega f(u_m^{(k)}(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(k)}(x) \nabla w_i(x) dx \\
&- \int_\Omega (f(u_m^{(k)}(x)))^\alpha w_i(x) dx \\
&+ \left( \int_\Omega f(u_m^{(0)}(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(0)}(x) \nabla w_i(x) dx \\
&- \int_\Omega (f(u_m^{(0)}(x)))^\alpha w_i(x) dx \Bigg| \\
|F_i(\xi_k) - F_i(\xi_0)| &\leq \Bigg| \left( \int_\Omega f(u_m^{(k)}(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(k)}(x) \nabla w_i(x) dx \\
&- \left( \int_\Omega f(u_m^{(0)}(x)dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(0)}(x) \nabla w_i(x) dx \Bigg| \\
&+ \left| \int_\Omega (f(u_m^{(k)}(x)))^\alpha w_i(x) dx - \int_\Omega (f(u_m^{(0)}(x)))^\alpha w_i(x) dx \right|
\end{aligned}
$$

Basta ver que: $|F_i(\xi_k) - F_i(\xi_0)| \to 0$ cuando $k \to \infty$

Para ello, se verificará previamente la convergencia de cada uno de los términos:

**a)** $\left( \int_\Omega f\Big(u_m^{(k)}\ (x)\Big) dx \right)^\beta \to \left( \int_\Omega f\Big(u_m^{(0)}\ (x)\Big) dx \right)^\beta \ cuando\ k \to \infty$

Por hipótesis se tiene que $\xi_k \to \xi_0$ cuando $k \to \infty \Leftrightarrow \xi_k^{(j)} \to \xi_0^{(j)},\ para\ j = 1, 2, \cdots, m$ si, y sólo si

$$
\left| \xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)} \right| \to 0\ cuando\ k \to \infty
$$

$$
\begin{aligned}
\left| u_m^{(k)}\ (x) - u_m^{(0)}\ (x) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(k)}\ w_i(x) - \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(0)}\ w_i(x) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \left| \xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)} \right| |w_i(x)|
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando $k \to +\infty \Rightarrow \left| \xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)} \right| \to 0$

$$
\begin{gathered}
w_i \in \mathbb{V}_m \subseteq H_0^1(\Omega) \Rightarrow w_i(x) \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \left| u_m^{(k)}\ (x) - u_m^{(0)}\ (x) \right| \to 0
\end{gathered}
$$

Quiere decir que $u_m^{(k)}\,(x) \to u_m^{(0)}\,(x)$ *cuando* $k \to +\infty$

$\Rightarrow f\Big(u_m^{(k)}\,(x)\Big) \to f\Big(u_m^{(0)}\,(x)\Big)$ pues f es continua **(función Caratheodory)**

$\Rightarrow \left(f\Big(u_m^{(k)}\,(x)\Big)\right)^{\beta} \to \left(f\Big(u_m^{(0)}\,(x)\Big)\right)^{\beta}$ pues la función $t \longmapsto t^{\alpha}$ es continua, $\beta \geq 0$

$$\left(f\Big(u_m^{(k)}\,(x)\Big)\right)^{\beta} \to \left(f\Big(u_m^{(0)}\,(x)\Big)\right)^{\beta} \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega}\Big(f\big(u_m^{(k)}(x)\big)\Big)^{\beta}dx \to \int_{\Omega}\Big(f\big(u_m^{(0)}(x)\big)\Big)^{\beta}dx$$

Pues $f$ es continua entonces es integrable.

Luego la convergencia esta garantizada.

$$\int_{\Omega}\Big(f\big(\big(u_m^{(k)}(x)\big)\Big)^{\alpha}dx \to \int_{\Omega}\Big(f\big(u_m^{(0)}(x)\big)\Big)^{\alpha}dx \quad \blacksquare \tag{3.6}$$

**Afirmación III**

$$\int_{\Omega}\nabla u_m^{(k)}(x)\nabla w_i(x)dx \to \int_{\Omega}\nabla u_m^{(0)}(x)\nabla w_i(x)dx$$

cuando $k \to \infty$ para cada $i = 1, 2, \cdots, m$

Primero veamos que:

$$\nabla u_m^{(k)}\,(x) \to \nabla u_m^{(0)}\,(x) \textit{ cuando } k \to +\infty$$

**En efecto**

$$\begin{aligned}
\Big|\nabla u_m^{(k)}\,(x) - \nabla u_m^{(0)}\,(x)\Big| &= \left|\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(k)}w_i\,(x)\right) - \nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(0)}w_i\,(x)\right)\right| \\
&= \left|\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(k)}w_i\,(x) - \sum_{i=1}^{m}\xi_i^{(0)}w_i\,(x)\right)\right| \\
&= \left|\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\Big[\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)}\Big]\,w_i\,(x)\right)\right| \\
&= \left|\left(\sum_{i=1}^{m}\Big[\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)}\Big]\,\nabla w_i\,(x)\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\Big|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)}\Big|\,|\nabla w_i\,(x)|
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $k \to +\infty$ se tiene $\Big|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)}\Big| \to 0$

y $w_i \in \mathbb{V}_m \Rightarrow \nabla\, w_i \in L^2(\Omega) \Rightarrow |\nabla w_i\,(x)| \in \mathbb{R}$

Por lo tanto se tiene que:

$$\nabla u_m^{(k)}\,(x) \to \nabla u_m^{(0)}\,(x)\;cuando\; k \to +\infty$$

Ahora si, retomando nuestro objetivo:

$$\left|\int_\Omega \nabla u_m^{(k)}\,(x)\nabla w_i\,(x)dx - \int_\Omega \nabla u_m^{(0)}\,(x)\nabla w_i\,(x)dx\right|$$

$$\leq \int_\Omega \left|\nabla u_m^{(k)}\,(x) - \nabla u_m^{(0)}\,(x)\right| |\nabla w_i(x)| dx$$

Para cada $i = 1, 2, \cdots, m$ y por la desigualdad de Hölder

$$\leq \left(\int_\Omega \left|\nabla u_m^{(k)}\,(x) - \nabla u_m^{(0)}\,(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla w_i(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \|w_i\|_{H_0^1}\left(\int_\Omega |\nabla u_m^{(k)}\,(x) - \nabla u_m^{(0)}\,(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\leq \|w_i\|_{H_0^1}\left(\int_\Omega \left|\underbrace{\nabla u_m^{(k)}(x) - \nabla u_m^{(0)}(x)}_{=0}\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

Para cada $i = 1, 2, \cdots, m$

$$= \|w_i\|_{H_0^1}\int_\Omega 0 dx = 0\; para\; cada\; i = 1, 2, \cdots, m$$

Por lo tanto se verifico que:

$$\int_\Omega \nabla u_m^{(k)}(x)\,\nabla w_i\,(x)\,dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\Omega \nabla u_m^{(0)}\,(x)\,\nabla w_i\,(x)\,dx \quad \blacksquare \tag{3.7}$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, m$

De la ecuación 3.2 y 3.3 se tiene:

$$\left(\int_\Omega f\left(u_m^{(k)}\right)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(k)}(x)\nabla w_i(x)dx \to \left(\int_\Omega f\left(u_m^{(0)}\right)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m^{(0)}(x)\nabla w_i(x)dx \tag{3.8}$$

Cuando $k \to \infty$

**b)** Veamos la siguiente convergencia

**Afirmación IV**

$$\int_\Omega \left(f\left(u_m^{(k)}\,(x)\right)\right)^\alpha w_i(x)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\Omega \left(f\left(u_m^{(0)}\,(x)\right)\right)^\alpha w_i(x)dx$$

**En efecto**

De la ecuación 3.1 se tiene:

$$\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \left(f\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\Omega}\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} w_i(x)dx - \int_{\Omega}\left(f\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha} w_i(x)dx\right|$$

$$\leq \int_{\Omega}\left|\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} - \left(f(\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha}\right| |w_i(x)|dx$$

**Por la desigualdad de Hölder**

$$\leq \left(\int_{\Omega}\left|\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} - \left(f\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}|w_i(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$= |w_i|_{L^2(\Omega)}\left(\int_{\Omega}\left|\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} - \left(f\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha}\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\leq c^*\|w_i\|_{H_0^1}(\Omega)\left(\int_{\Omega}\left|\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} - \left(f\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha}\right|^2 dx\right)^{1/2} \quad \text{(Desigualdad de Poincaré).}$$

$$= c^*\|w_i\|_{H_0^1}(\Omega)\left(\int_{\Omega}\left|\underbrace{\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} - \left(f\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha}}_{=0,\ k\to+\infty}\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= c^*\|w_i\|_{H_0^1}\left(\int_{\Omega}0\,dx\right)^{1/2} = 0,\ w_i \in \mathbb{V}_m \subseteq H_0^1(\Omega)$$

$$\int_{\Omega}\left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} w_i(x)\,dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_{\Omega}\left(f\left(u_m^{(0)}(x)\right)\right)^{\alpha} w_i(x)\,dx \tag{3.9}$$

Y así, finalmente de la ecuación 3.8 y 3.3

$$|F_i(\xi_k) - F_i(\xi_0)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots, m$

Luego eso demuestra que $F_i$ son continuas para cada $i = 1, 2, \cdots, m$ sí, y sólo si F es continua. ■

**(II)** Determinaremos la existencia de un $R > 0$ **(Por el Teorema del Ángulo Agudo)**

$$\begin{aligned}\langle F(\xi), \xi\rangle &= \langle (F_1(\xi), F_2(\xi), \cdots, F_m(\xi)), (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \sum_{i=1}^{m} F_i(\xi).\xi_i\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[\left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\,dx\right)^{\beta}\int_\Omega \nabla u_m(x).\nabla w_i(x)\,dx - \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^{\alpha}\,w_i(x)\,dx\right].\xi_i$$

$$= \left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)dx\right)^{\beta}\sum_{i=1}^{m}\left(\int_\Omega \nabla u_m(x).\nabla w_i(x)dx\right)\xi_i -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^{\alpha} w_i(x)\,dx\right)\xi$$

$$= \left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)dx\right)^{\beta}\int_\Omega \nabla u_m(x).\nabla \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i(x)\right)}_{u_m}dx -$$

$$\int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^{\alpha}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i(x)\right)}_{u_m}dx$$

$$= \left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\,dx\right)^{\beta}\int_\Omega \nabla u_m(x).\nabla u_m(x)\,dx - \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^{\alpha} u_m(x)\,dx$$

$$= \left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\,dx\right)^{\beta}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\,dx - \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^{\alpha} u_m(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\,dx\right)^{\beta}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\,dx}_{I} - \underbrace{\int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^{\alpha} u_m(x)\,dx}_{II}$$

**(a) Para I**

**Afirmación (1)**

$$\left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\,dx\right)^{\beta}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\,dx \geq k_0^{\beta}\,|\Omega|^{\beta}\,\|u_m\|_{H_0^1}^2$$

**En efecto**

$$\left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\,dx\right)^{\beta}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\,dx \geq \left(\int_\Omega k_0 dx\right)^{\beta}\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2 dx$$

$$f\Bigg(\underbrace{u_m(x)}_{\in\mathbb{R}}\Bigg) \geq k_0 > 0 \Rightarrow \int_\Omega f\big(u_m(x)\big)dx \geq \int_\Omega k_0 dx$$

$$= k_0^{\beta}\left(\int_\Omega dx\right)^{\beta}\underbrace{\int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\,dx}_{|\nabla u_m|_2^2}$$

$$= \;\; k_0^{\beta}\,|\Omega|^{\beta}\,|\nabla u_m|_2^2$$

$$= \;\; k_0^{\beta}\,|\Omega|^{\beta}\,\|u_m\|^2$$

Pues $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla u|_{L^2(\Omega)} \sim |u|_{H^1(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$

finalmente

$$\left(\int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\ dx\right)^\beta \int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\ dx \geq k_0^\beta\ |\Omega|^\beta\ \|u_m\|_{H_0^1}^2$$

**(b) Para II**

**Afirmación (2)**

$$\int_\Omega |f(u(x))|^\alpha\ |u_m(x)|\ dx \leq \int_\Omega |k_\infty|^\alpha\ |u_m(x)|\ dx$$

**En efecto**

$$f(u(x)) < k_\infty \Rightarrow |f(u(x))|^\alpha < |k_\infty|^\alpha$$
$$|f(u(x))|^\alpha\ |u_m(x)| < |k_\infty|^\alpha\ |u_m(x)|$$

Integrando sobre $\Omega$

$$\int_\Omega |f(u(x))|^\alpha\ |u_m(x)|\ dx \leq \int_\Omega |k_\infty|^\alpha\ |u_m(x)|\ dx$$

$$= |k_\infty|^\alpha \int_\Omega |u_m(x)|\ dx$$

$$\leq\ |k_\infty|^\alpha \left(\int_\Omega 1^2.dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_m(x)|^2 dx\right)^{1/2} \textbf{(Hölder)}$$

$$=\ k_\infty^\alpha\ |\Omega|^{1/2}\ |u_m|_2$$

$$\leq\ k_\infty^\alpha\ |\Omega|^{1/2}\ c^*\ \|u_m\|_{H_0^1}(\Omega)\ \textbf{(Poincaré)}$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha\ u_m(x)\ dx \geq -\ k_\infty^\alpha\ |\Omega|^{1/2}\ c^*\ \|u_m\|_{H_0^1}(\Omega)$$

Como

$$\langle F(\xi), \xi\rangle_{\mathbb{R}^m} = \left(\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta \int_\Omega |\nabla u_m(x)|^2\ dx\ -\ \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha\ u_m(x)\ dx$$

Reemplazando **(a)** y **(b)** se tiene:

$$\geq k_0^\beta\ |(\Omega)|^\beta\ \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2\ -\ k_\infty^\alpha\ |\Omega|^{1/2}\ c^*\ \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Donde $k_0,\ k_\infty,\ c^*$ son constantes positivas.

Para $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \in R$ se tiene

$$\langle F(\xi), \xi\rangle_{\mathbb{R}^m} \geq k_0^\beta.\ |\Omega|^\beta.\ \underbrace{\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2}_{\in R} - k_\infty^\alpha.\ |\Omega|^{1/2}.\ c^*.\ \underbrace{\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}}_{\in R} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi),\xi\rangle_{\mathbb{R}^m} &= \underbrace{k_0^{\beta}.\,|\Omega|^{\beta}}_{A}.\,R^2 \;-\; \underbrace{k_\infty^{\alpha}.\,|\Omega|^{1/2}.\,c^*}_{B}.R \;\geq 0\\
\langle F(\xi),\xi\rangle_{\mathbb{R}^m} &= AR^2 \;-\; BR \geq 0\\
\langle F(\xi),\xi\rangle_{\mathbb{R}^m} &= R(AR \;-\; B) \geq 0\\
&\Rightarrow\; AR \;-\; B \geq 0\\
\langle F(\xi),\xi\rangle_{\mathbb{R}^m} &= R \geq \frac{B}{A}\; independiente\; de\; m
\end{aligned}$$

Como $\langle F(\xi),\xi\rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0$ entonces $R = \frac{B}{A}$

Por el **Teorema del ángulo águdo** existe $\xi \in \overline{B(0,R)}$ / $F(\xi) = 0$
donde

$$\Rightarrow (F_1(\xi), F_2(\xi), \cdots, F_m(\xi)) = (0, 0, \cdots, 0)$$

$$\Rightarrow F_i(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow F_i(\xi) = \left(\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^{\beta} \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_i(x)\,dx - \int_\Omega \left(f\left(u_m^{(k)}(x)\right)\right)^{\alpha} w_i(x)\,dx = 0$$

Es decir, existe $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$

de modo que resuelve el sistema aproximado (S.A) $\blacksquare$

Además se verifica que:

**Afirmación**

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^{\beta} \displaystyle\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_i(x)dx = \displaystyle\int_\Omega \left(f\left(u_m(x)\right)\right)^{\alpha} w_i(x)dx \\ i = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{3.10}$$

Es equivalente a:

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^{\beta} \displaystyle\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w dx = \displaystyle\int_\Omega \left(f\left(u_m(x)\right)\right)^{\alpha} w\,dx \\ \forall w \in \mathbb{V}_m \subseteq H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.11}$$

**En efecto**

**(a)** 3.10 $\rightarrow$ 3.11

Partimos de la siguiente igualdad que es válida para $i = 1, 2, \cdots, m$

$$\left(\int_\Omega f\left(u_m(x)\right)dx\right)^{\beta} \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_i(x)dx \;= \int_\Omega \left(f\left(u_m(x)\right)\right)^{\alpha} w_i(x)dx$$

Multiplicamos por $\xi_i \in \mathbb{R}$ a cada lado de la igualdad

$$\xi_i \left[ \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla w_i(x) dx \right] = \xi_i \left[ \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w_i(x)\, dx \right]$$

$$\Rightarrow \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla \xi_i w_i(x)\, dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha \xi_i w_i(x)\, dx$$

Sumando miembro a miembro desde $i = 1 \ \cdots \ m$

$$\Rightarrow \ \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla \left( \sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x) \right) dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha \left( \sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x) \right) dx$$

$$\Rightarrow \ \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla \left( \underbrace{\sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x)}_{w(x)} \right) dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha \left( \underbrace{\sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x)}_{w(x)} \right) dx$$

$$\Rightarrow \ \left( \int_\Omega f(u_m(x))dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla w(x) dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w(x)\, dx \quad \blacksquare$$

**(b)** 3.11 $\rightarrow$ 3.10

Como $w = \displaystyle\sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x) \ tenemos:$

$$\left( \int_\Omega f\big(u_m(x)\big)\, dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla w_{(x)}\, dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \ \left( \int_\Omega f(u_m(x))\, dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla \left( \sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x) \right) dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha \left( \sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x) \right) dx$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^m \xi_i \left( \int_\Omega f(u_m(x))\, dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla (w_i(x))\, dx = \sum_{i=1}^m \xi_i \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha\, (w_i(x))\, dx$$

Igualando cada sumando desde $i = 1 \ hasta \ \cdots m, \ se \ tiene$

$$\xi_1 \left( \int_\Omega f(u_m(x))\, dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla (w_1(x))\, dx = \xi_1 \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha (w_1(x))\, dx$$

$$\xi_2 \left( \int_\Omega f(u_m(x))\, dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla (w_2(x))\, dx = \xi_2 \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha (w_2(x))\, dx$$

$$\vdots$$

$$\xi_m \left( \int_\Omega f(u_m(x))\, dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla (w_m(x))\, dx = \xi_m \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha (u_m(x))\, dx$$

Como $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ son números reales no nulos, lo cancelamos en cada ecuación

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla(w_1(x))\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha (w_1(x))\,dx$$

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla(w_2(x))\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha (w_2(x))\,dx$$

$\vdots$

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla(w_m(x))\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha (w_m(x))\,dx$$

Se enuncia así:

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_i(x)\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w_i(x)\,dx$$

Para $i = 1, 2, \cdots, m$ ■

**Se probó anteriormente que** $\exists R > 0 : \langle F(\xi), \xi\rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0\ \forall\ |\xi| = R, |\xi|_{\mathbb{R}^m} = \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}$

Se tiene que $\exists M > 0 : \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$

Como $u_m \in V_m \subset H_0^1(\Omega) \Rightarrow (u_m)_{m\geq 1} \subset H_0^1(\Omega)$. Además ya se vio que $\|u_m\| \leq M$

Como $H_0^1(\Omega)$ es reflexivo, entonces por **teorema de Alaouglu - Bourbaki** posee una subsucesión $(u_{m_k}) \subset H_0^1(\Omega)$ de $(u_n)_{n\geq 1}$ que aún denotaremos con $(u_m)_{m\geq 1}$ tal que:

$$u_m \rightharpoonup u\ en\ H_0^1(\Omega)\ converge\ debilmente \tag{3.12}$$

**III Pasaje al límite**

Como $\|u_m\| \leq M$ entonces $(\|u_m\|)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces tiene una subsucesión convergente $\|u_{m_i}\|$ que aún la denotaremos con $\|u_m\|$.

Consideremos $m_0$ fijo y $m \geq m_0$ de 3.11 se tiene:

$$\underbrace{\left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta}_{I_1} \underbrace{\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w(x)\,dx}_{I_2} = \underbrace{\int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w(x)\,dx}_{I_3},\ \forall w \in \mathbb{V}_{m_0}$$

**Analizaremos la convergencia de cada término en la expresión anterior**

**a) Análisis de $I_1$**

**AFIRMACIÓN 1** $\left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta \to \left(\int_\Omega f(u(x))\,dx\right)^\beta$

**En efecto**

Como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ inmersión compacta y $u_m \rightharpoonup u\ en\ H_0^1(\Omega)$ (convergencia débil) resulta que existe otra subsucesión de la subsucesión que se continuará denotando con $u_m$ tal que:

$$u_m \to u \; en \; L^2(\Omega), \; convergencia \; fuerte \tag{3.13}$$

Por teorema IV.9 (p. 58) (Brezis), se tiene $(u_m)_{m\geq 1} \subseteq L^2(\Omega) \quad y \quad u \in L^2(\Omega)$ tal que:

$$|u_m - u|_2 \to 0$$

Entonces existe otra subsucesión de la subsucesión que continuaremos denotando con $u_m$ tal que:

1. $u_m(x) \to u(x) \; c.t.p \; x \in \Omega$
2. $|u_m(x)| \leq v(x), \; c.t.p \; x \in \Omega \; con \; v \in L^2(\Omega)$

Y así de (2) se tiene:

$$\begin{aligned} u_m(x) \leq |u_m(x)| \leq v(x), \; c.t.p \quad x \in \Omega \\ \Rightarrow f(u_m(x)) \leq f(v(x)), \; c.t.p \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Pues f es función Caratheodory, continua en la segunda variable.
Esto significa que $f(u_m(x))$ está dominada por una función integrable $f(v(x))$

Por el **Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue** la función $f(u_m(x))$ es integrable y

$$\int_\Omega f(u_m(x))\, dx \to \int_\Omega f(u(x))\, dx, \quad para \; m \to +\infty$$

Y teniendo en cuenta que la aplicación potencia $t \to t^\beta$ es continua, $\beta \geq 0$ se tiene:

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))\, dx\right)^\beta \to \left(\int_\Omega f(u(x))\, dx\right)^\beta \tag{3.14}$$

**b) Análisis de $I_2$**

**AFIRMACIÓN 2**

$$\int_\Omega \nabla u_m(x)\, \nabla w_m(x)\, dx \to \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla w(x)\, dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

En efecto

**1)** Definiendo la forma bilineal

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \;&\to\; \mathbb{R} \\ (u, w) \;&\to\; a(u,w) = \int_\Omega \nabla u(x)\, \nabla w(x)\, dx \end{aligned}$$

Sea $H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es una inmersión continua, sea también $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $u \in H_0^1(\Omega)$ y $w \in H_0^1(\Omega)$

Por la inmersión continua y por la desigualdad de Holder se tiene:

$$hu \in L^1(\Omega)$$

y

$$hw \in L^1(\Omega)$$

Luego $\alpha(hu) + \beta(hw) \in L^1(\Omega)$ y

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(\alpha u + \beta w) &= \int_\Omega \alpha(hu) + \beta(hw) \\
&= \alpha\left(\int_\Omega hu\right) + \beta\left(\int_\Omega hw\right)
\end{aligned}$$

Está igualdad implica que:

$$\phi(\alpha u + \beta w) = \alpha\phi(u) + \beta\phi(w)$$

Por lo tanto $\phi$ es bilineal. ■

**2)** Veremos si es continua $a(u,w)$ es continua, $|a(u,w)| \leq k\|u\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1}$

$$a(u,w) = \int_\Omega \nabla u(x)\ \nabla w(x)\ dx = \sum_{i=1}^m \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\ dx$$

**En efecto**

$$\begin{aligned}
|a(u,w)| &= \left|\sum_{i=1}^m \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\ dx\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^m \int_\Omega \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|\ dx \\
&\leq \sum_{i=1}^m \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2\ dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2\ dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

**Desigualdad de Hölder**

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^m \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^2}\ \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|_{L^2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^m \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^2}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^m \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|_{L^2}^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

**Desigualdad de Hölder Discreto**

$$= \|u\|_{H_0^1}\ \|w\|_{H_0^1}$$

finalmente $\|a(u,w)\| \leq k\|u\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1}$

Por lo tanto $a(u,w)$ es continua ■

**3)** Veremos si es coerciva $a(u,w)$ es $H_0^1(\Omega)$ $coerciva,\ i.e.\ a(u,v) \geq k\|u\|_{H_0^1}^2$

**En efecto**

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \nabla u(x)\nabla u(x)\,dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \\ &= |\nabla u|^2_{L^2} \\ &\geq \|u\|^2_{H_0^1} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Finalmente $a(u,v) \geq k\|u\|^2_{H_0^1}$

Por lo tanto es coerciva. ■

Y así $a(u,w)$ es un producto interno en $H_0^1$ equivalente al producto interno usual natural de $H_0^1$, es decir, existe $c_0,\ c_1 > 0$ tal que:

$$c_0\|u\|^2_{H_0^1} \leq a(u,w) \leq c_1\|u\|^2_{H_0^1}$$

**Observación 3.3** *H espacio de Hilbert*

$$u_v \rightharpoonup u \ en\ H \Leftrightarrow (u_v,w)_H \to (u,w)_H \tag{3.15}$$

así de 3.5 y 3.8 se tiene que:

$$a(u_m,w) \to a(u,w)\ \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_m(x)\,dx \to \int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)\,dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.16}$$

Además, sabiendo que:

$$\begin{aligned} v_m &\to v \\ u_m &\to u \\ \Rightarrow u_m.v_m &\to u,v \end{aligned}$$

Luego de 3.7 y 3.9 se tiene que:

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w(x)\,dx \to \left(\int_\Omega f(u(x))\,dx\right)\int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)\,dx$$
$$\forall w \in H_0^1(\Omega)$$

**c) Análisis de $I_3$**

**AFIRMACIÓN**

$$\int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w(x)\,dx \to \int_\Omega \big(f\big(u(x)\big)\big)^\alpha w(x)\,dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

**En Efecto**

Del caso $a)$ (análisis $I_1$) se tenía que:

$$f(u_m(x)) \leq f(v(x)) \quad c.t.p. \quad x \in \Omega, \quad v \in L^2(\Omega)$$

Luego

$$\big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha \leq \big(f\big(v(x)\big)\big)^\alpha \quad c.t.p. \quad x \in \Omega,\ \alpha \geq 0$$

$$\big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha.w(x) \leq \big(f\big(v(x)\big)\big)^\alpha.w(x) \quad w \in H_0^1(\Omega),\ w(x) \in \mathbb{R}$$

Otra vez, por el **Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue** la función $\big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha.w(x)$ está dominada por una función integrable $\big(f\big(v(x)\big)\big)^\alpha.w(x)$

$$\Rightarrow \int_\Omega \big(f(u_m(x))\big)^\alpha.w(x)\,dx \to \int_\Omega \big(f\big(u(x)\big)\big)^\alpha.w(x)\,dx$$

Retornando al sistema aproximado (S.A.)

$$(S.A.)\left|\begin{array}{l}
\left(\displaystyle\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta \displaystyle\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_1(x)dx = \displaystyle\int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_1(x)dx \\
\left(\displaystyle\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta \displaystyle\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_2(x)dx = \displaystyle\int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_2(x)dx \\
\left(\displaystyle\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta \displaystyle\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_3(x)dx = \displaystyle\int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_3(x)dx \\
\vdots \\
\left(\displaystyle\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta \displaystyle\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w_m(x)dx = \displaystyle\int_\Omega (f(u_m(x)))^\alpha w_m(x)dx
\end{array}\right.$$

Se llega a la siguiente conclusión por el sistema aproximado. (S.A.)

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w(x)\,dx$$

$$\forall w \in \mathbb{V}_m \subseteq H_0^1(\Omega)$$

Y tomando $m \geq m_0$

$$\left(\int_\Omega f(u_m(x))dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w(x)\,dx$$

$$\forall w \in \mathbb{V}_{m_0} \subseteq H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \left(\int_\Omega f(u_m(x))\,dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u_m(x)\big)\big)^\alpha w(x)\,dx$$

$$\forall w \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$$

Pero, $\displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = H_0^1(\Omega)$

Por la densidad y continuidad resulta:

$$\left( \int_\Omega f(u(x))\,dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u(x) \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega \big(f\big(u(x)\big)\big)^\alpha w(x)\,dx$$

$$\forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Esto es $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de:

$$\left| \begin{array}{l} -\left( \displaystyle\int_\Omega f(u(x))dx \right)^\beta \Delta u = f(u(x))^\alpha \text{ en } \Omega \\ u = 0 \quad en \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.17}$$

Por lo tanto se ha llegado a concluir la existencia de la solución débil de 3.2. ■

CAPÍTULO 4

# CONCLUSIONES

## Conclusiones

(1). El problema no local admite solución débil para $f \in L^2(\Omega)$. Donde se ha garantizado la existencia de la solución débil de un problema elíptico por el Método de Galerkin, que tiene sus aplicaciones, como es el caso para resolver problemas que no son locales, un caso particular es para encontrar soluciones débiles con sistemas no lineales.

(2). Para obtener esta solución se ha aplicado el teorema del ángulo agudo y la condición de Dirichlet que en esencia determina la existencia de dicha solución.

# Referencias


Adams, R., y Fournier, J. (2003). *Sobolev space*. Elsevier Second Edition.

Agmon, S. (1959). *The $l^p$ approach to the dirichlet problem part i. regularity theorems*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze.

Ambrosetti, A., y Cerami, G. (1994). *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*. Journal of Functional Analysis.

Banach, S. (1987). *Theory of linear operations*. North Holland Amsterdam.

Barahona M., W. (2018). *Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no local semilineal*. San Marcos.

Berberian, S. (1974). *Lectures in functional analysis and operator theory*. Springer - Verlag New York.

Bourbaki, N. (1966). *General topology*. Addison - Wesley.

Brezis, H. (1984). *Análisis funcional*. Alianza: Madrid.

Cabada, F. y. C., A. (2012). *Existence of solutions of a nonlocal elliptic system vía galerkin method*. Reverté.

Cabello, J. (2009). *Análisis funcional*. Universidad de Granada.

De Guzman, R. (1979). *Integración, teoría y técnicas*. Madrid.

Dieudonné, F. (1981). *History of functional analysis*. Reverté.

Gatica, M. (2011). *Espacios de funciones una introducción a los espacios de sobolev*. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

Hernandez, J. E. (2018). *Caracterización de los espacios de hilbert separables*. Universidad de Panáma.

Hoffman, K. (1979). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall, New Jersey.

Kesavan, S. (1989). *Topics in functional analysis and applications*. Wiley Eastern Limited.

Kolmogorov, A. (1975). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Mir.

Kreyszig, E. (1984). *Introductory functional analysis with applications*. wiley.

Lima, E. L. (1976). *Espacios métricos*. Euclides.

Manuel, M. M. (2000). *Espacios de sobolev*. Rio de Janeiro.

Medeiros, L. (2000). *Iniciación a los problemas elípticos no homogéneos*. Rio de Janeiro.

Rodney, B. J. (2009). *Notas de aula análisis funcional*. Universidad Federal de Minas Gerais.

Rojas Bazán, E. (2016). *Existencia de solución débil de un problema semilineal elíptico*. Universidad Nacional mayor de San Marcos, Perú.

Rosas Cruz, J. (2005). *Una aplicación del análisis funcional a las ecuaciones diferenciales*. Universidad del Valle de Mexico.

Rubiano, G. N. (2000). *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia.

Rudin, W. (1979). *Análisis funcional*. Reverté.

Sanchez V., J. (2017). *Un problema de dirichlet no local*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Apéndice A

# Anexo

# Matriz de consistencia

| Problemas | Objetivos | Hipótesis | Variables | Metodología |
|---|---|---|---|---|
| **General** | **General** | **General** | **Variable1.** | **Tipo de investigación** |
| ¿Será posible garantizar la solución débil de un problema elíptico por el método de Galerkin? | Determinar las condiciones para garantizar la existencia de la solución débil del problema a estudiar. | Es posible garantizar la existencia de la solución débil de un problema elíptico por el método de Galerkin. | ● **Independiente** Es la condición de Dirichlet y la discretización. | ● Teórica básica, explicativo. |
| **Específico** | **Específico** | **Específico** | **Variable2** | **Diseño de investigación** |
| ● ¿Bajo que condiciones se garantizará la existencia de la solución débil de un problema elíptico?. | ● Determinar las condiciones que garantizan la existencia de la solución débil de un problema elíptico. | ● Existen condiciones para la existencia de la solución débil de un problema por el método de Galerkin. | ● **dependiente** Es la solución débil que se obtiene al debilitar el problema original tomando una base finita de Hilbert. | ● Cualitativo: descriptivo - demostrativo. |
| ● ¿Bajo que condiciones se estudiará la existencia de la solución para el problema elíptico con la condición de Dirichlet?. | ● Determinar las condiciones que garantizan la condición de Dirichlet. | ● Existen condiciones que se van a dar con la condición de Dirichlet. | | **Método de investigación** ● Inductivo-Deductivo. |

Juan Luis Pillaca Meneses
Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
jlpmeneses@gmail.com
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas, Especialidad Matemáticas
Actualmente estudiante de la Maestría en Docencia Universitaria
Apasionado a la investigación en las áreas de las ciencias puras, TIC, e-learning, inclusión educativa y aprendizaje. Ponente a nivel nacional e internacional.
Docente de diferente Institutos y Centros preuniversitarios.

Adrián Allaucca Paucar
Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
adrian.allaucca@unsch.edu.pe
Licenciado en Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, con N° de registro 1085 del colegio de matemáticos del Perú (COMAP), Magister en Docencia Universitaria y Gestión educativa, categoría Asociado a dedicación exclusiva, ex docente de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, actual docente de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, 20 años de docente universitario.

Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
https://orcid.org/0000-0001-7084-5840
daul.paiva@unsch.edu.pe
daulpaivay@gmail.com
Licenciado en Matemática por la Universidad Nacional de Piura.
Magíster en Matemática Aplicada por la Universidad Nacional de Piura. Docente Asociado a Dedicación Exclusiva en la UNSCH. Experiencia en Docencia Universitaria por más de 15 años en diversas universidades del Perú. Ponente en eventos académicos nacionales e internacionales. Estudios de Doctorado en Matemática en el Instituto de Matemática y Ciencias Afines de la Universidad Nacional de Ingeniería. Miembro del Colegio de Matemáticos del Perú (COMAP) con número de colegiatura 1489.

Víctor Alcides Coaquira Cárdenas.
Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga.
https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0003-0108-8369
victor.coaquira@unsch.edu.pe
Matemático con mención en Matemática de la universidad Nacional de San Antonio Abab del Cusco, con número de colegiatura N° 862 del Colegio de Matemáticos del Perú (COMAP). Magister en Docencia Universitaria por la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, con estudios de Doctorado en Matemática por la Universidad Nacional del Santa. Diplomado en Formación de Tutores por el Estado de México y el Tecnológico de Estudios Superiores de Chimalhuacán. Docente universitario con más de 20 años de experiencia dictando cursos de Matemática en diferentes universidades del Perú.

Savez
editorial

ISBN: 978-9942-603-62-3

9 789942 603623