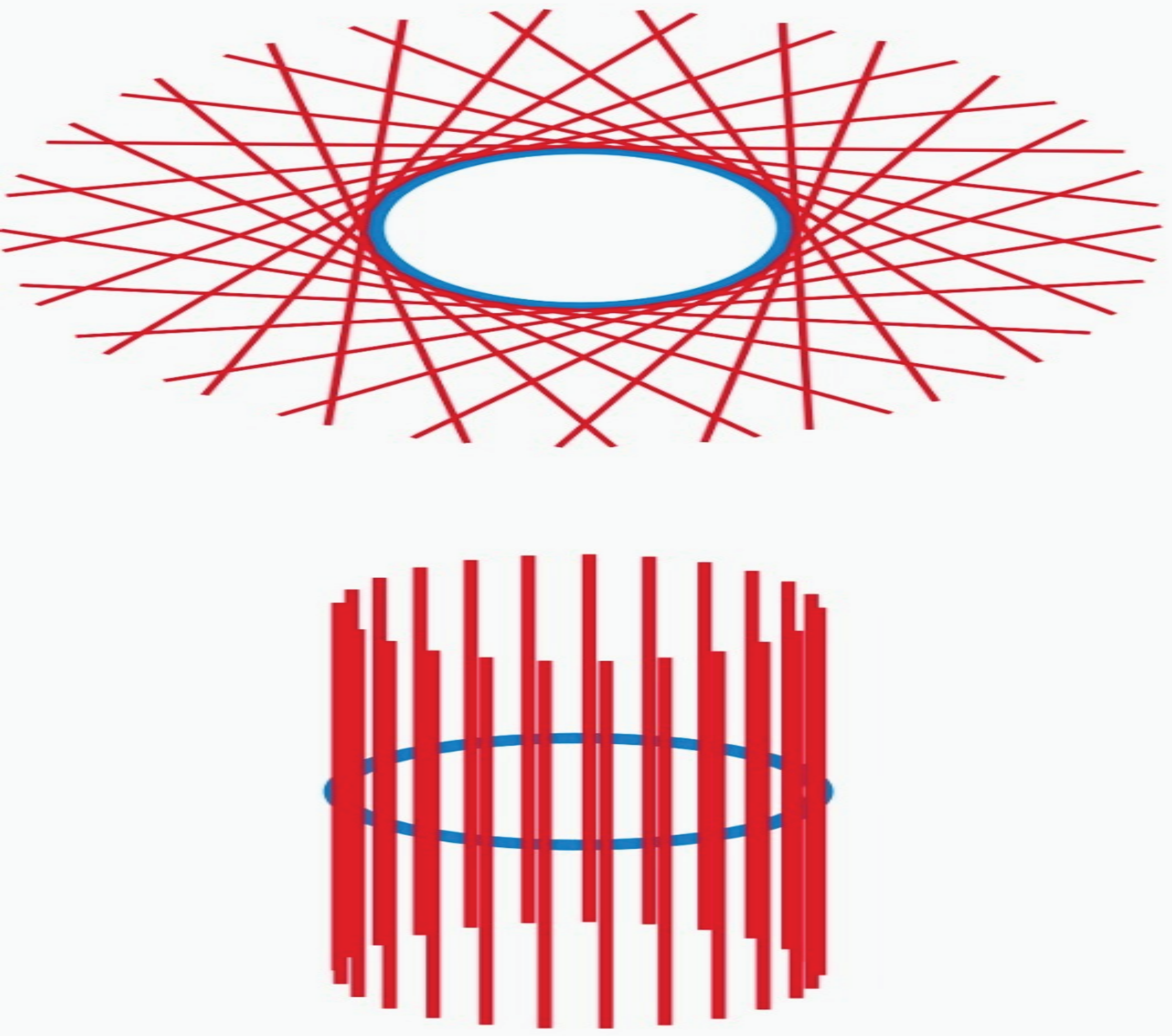

Conexión principal sobre un fibrado principal

Alexsander Apaico Cordova
Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Guillermo Jesús Zela Quispe
José Carlos Juarez Pulache

Savez editorial

Savez editorial

Conexión principal sobre un fibrado principal

Conexión principal sobre un fibrado principal

Alexsander Apaico Cordova
Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Guillermo Jesús Zela Quispe
José Carlos Juarez Pulache

Savez editorial

Alexsander Apaico Cordova
Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Guillermo Jesús Zela Quispe
José Carlos Juarez Pulache

Conexión principal sobre un fibrado principal

ISBN: 978-9942-603-65-4

Savez editorial
Título:
Conexión principal sobre un fibrado principal

Primera Edición: Julio 2022

Obra revisada previamente por la modalidad doble par ciego, en caso de requerir información sobre el proceso comunicarse al correo electrónico
editor@savezeditorial.com

A mi hermosa hija, Luciana.

Agradecimientos

A mis padres, por cultivar en mi vida valores que son tan necesarios para aportar al cambio de nuestra sociedad; especialmente a mi madre por enseñarme a luchar por mis metas. A mi hermosa familia, quienes me dan fuerzas para poder continuar.

A la Universidad Nacional de San Cristobal de Huamanga, por su gran labor en el aporte a la educación; brindando oportunidad a aquellos quienes queremos lograr nuevos éxitos. A los docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico-Matemáticas quienes en el transcurso de mis estudios supieron motivarme y dieron lo mejor de sí.

A todas las personas que me apoyaron con una palabra de motivación para nunca rendirme. A aquellos que siempre creyeron en mí.

Resumen

El presente trabajo trata de un fibrado principal P como una estructura geométrica que formaliza algunas características esenciales de la geometría diferencial; en un modo local es representando como un producto cartesiano $U \times G$ de un conjunto abierto U de una variedad M con un grupo de Lie G. Del mismo modo como en el producto cartesiano, el fibrado principal P está equipado con una acción de G sobre P, análogo a $(m, g)h = (m, gh)$. Esta caracteristica en su definición, hace que los fibrados asociados que devienen de P sean completamente caracterizados por una representación de G en algún grupo de Lie de interés para el fibrado asociado. Además se estudiarán las conexiones en fibrados principales, conocidas como conexiones principales, aquellas que son una generalización de conexiones en fibrado Tangente de M; con la propiedad esencial de ser invariantes bajo la acción del grupo estructural G. Y se mostrará que una conexión principal sobre un fibrado principal induce una conexión generalizada en cualquiera de sus fibrados asociados. Y se consigue abordar, en un modo más general, muchas de las áreas de la geometría diferencial cuando se está tratando al fibrado principal de los referenciales $\mathrm{Fr}(E)$, o fibrado referencial, de un fibrado vectorial E.

Palabras-clave: Geometría diferencial, teoría de fibrados, teoría de conexiones

Abstract

This presente work deals with a principal fiber bundle P as a geometric structure that formalizes some essential characteristics of the differential geometry; locally es represented as a Cartesian product $U \times G$ of an open subset U of a smooth manifold M with a Lie group G. As in the Cartesian product, the principal fiber bundle P is equipped with an action of G on P, analogous to $(m, g)h = (m, gh)$. This characteristic in its definition, makes the associated fiber bundles that come from P are completely characterized by a representation of G in some Lie group of interest for the associated bundle. In addition, the connections in principal fiber fibers, known as principal connections, those that are a generalization of connections in TM, will be studied; with the essential property of being invariant under the action of structural group G. And it will be shown that a principal connection over a principal fiber bundle induces a generalized connection in any of its associated fiber bundles. And it is possible to approach, in a more general way, many of the areas of differential geometry when dealing with the principal fiber bundle $\mathrm{Fr}(E)$ of the referentials, or referential bundle, of a vector bundle E.

Keywords: Differential geometry, fiber bundle theory, conections theory

Índice general

I. Introducción

El término **conexión** hace su aparición por primera vez en un texto de 1918, cuya autoria pertenece a Hermann Weyl, intitulado *Reine Infinitesimal Geometrie*; como recordado en (Abraham y Marsden, 1978). En su sección 3 describe una *conexión afín* como aquel que determina para un vector dado en el punto P' un otro vector infinitesimalmente próximo en el punto P bajo una transformación afín denominada transporte paralelo de P hacia P'. La transformación es afín en el sentido de que este preserva colinealidad y relaciones de distancia mas no necesariamente ángulos o longitudes. Weyl fue por más al definir las componentes de la conexión afín por $\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}$. En la sección 4 Weyl define una conexión métrica como siendo una conexión afín sobre una variedad Riemanniana donde los Γ^i_{rs} son los símbolos de Christoffel.

Weyl fue el primero en hacer una generalización exitosa. Su *conexión afín* generaliza exitósamente a la *conexión de Levi-Civita* hacia otros espacios además de la Riemanniana (Kolár y Michor, 1993). Lo que hizo Weyl fue solamente un primer escalón en el proceso de generalización.

Durante las siguientes dos décadas Élie Cartan ocupó una posición central en el desarrollo de la teoría de la conexión, ya que se ocupó de llevar la visión de la geometría de F. Klein a la geometría diferencial. Para la época en que Einstein desarrollaba la Teoría General de la Relatividad, Élie Cartan ya era un experto en la teoría de *grupos de Lie infinitesimales* (i.e., *álgebras de Lie*); con lo que ya venía trabajando por lo menos desde 1912 (Kobayashi y Nomizu, 1963). Una vez que entró en contacto con la teoría de Einstein, Cartan inmediatamente inició a trabajar con un abordage más general que vinculó la geometría diferencial a una *generalización infinitesimal del programa de Klein*. Con este fin, Cartan trabajó con lo que llamó *espacios generalizados* (espace généralisé). Clásicamente un espacio generalizado fue *un espacio de espacios tangentes tal que dos espacios tangentes infinitesimalmente próximos están relacionados por una transformación infinitesimal de un grupo de Lie*, i.e., un espacio con una conexión (Kobayashi y Nomizu, 1963). Para la misma época Weyl inició su propia investigación en la teoría de representaciones de grupos de Lie. Weyl usó el cálculo diferencial absoluto de Ricci, mientras que Cartan usó su propio cálculo de formas diferenciales, que además de caracterizar las conexiones y curvatura, permitió conocer el nuevo fenómeno de *torsión* (Kolár y Michor, 1993).

Fue el estudiante de Cartan, Charles Ehresmann, quien finalmente desentramó y clasificó exitósamente todas las conexiones específicas y generalizadas que habían surgido en la primera mitad del siglo 20. Comenzó este esfuerzo con la motivación de comprender las conexiones de Cartan desde un punto de vista global (además de ser influenciado por Lie y Ernest Vessiot). Con esta finalidad Ehresmann introdujo el concepto de *fibrados generales* independientemente de Whitney y Steenrod (Steenrod, 1951). Ehresmann publicó sus primeras anotaciones durante el periodo de 1941-1944 en donde él define un **fibrado principal** (localmente trivial) y sus **fibrados asociados** (también localmente triviales). Cabe mencionar que en su artículo de 1943, *Sur les espaces fibrés associés á une variété différentiable*, una variedad diferenciable es definida por medio de un atlas de cartas locales por primera vez.

Teniéndose en cuenta que las diferentes áreas de la geometría diferencial pueden ser caracterizados definiéndose un tensor y la acción de un cierto grupo de Lie, actuando sobre este tensor. Surgen ideas de sintetizar todas estas áreas y describirlas de un **modo compacto**. Así hace aparición la teoría de fibrados suaves. Charles Ehresmann, estudiante de Elie Cartan, publicó sus primeras anotaciones durante el periodo de 1941-1944 en donde él define un **fibrado principal** (localmente trivial) y sus **fibrados asociados** (también localmente triviales) en *Sur les espaces fibrés associés á une variété différentiable*. Esto conduce al siguiente hecho fundamental: describir las diferentes áreas de la geometría diferencial usando conexiones principales como una generalización de las derivadas covariantes para cualquier fibrado vectorial. Así, es justificada la descripción de todas estas áreas de la geometría diferencial a través de fibrados principales y conexiones principales. Esto permite una poderosa abstracción y unificación dentro de la geometría diferencial. Este hecho conduce a una amplia aplicación de la geometría diferencial en diferentes áreas de las ciencias básicas.

En geometría diferencial las principales estructuras geométricas conocidas están definidas en el fibrado tangente de una variedad suave M. Más generalmente, estas estructuras geométricas están definidas en fibrados vectoriales $E \to M$. Es conocido que en estas estructuras el grupo de Lie asociado, en E, es el grupo lineal general $GL(\mathbb{E})$. Y todos los subgrupos de Lie, de $GL(\mathbb{E})$, describen las diferentes estructuras geométricas definibles en E. Es decir, estos grupos de Lie describen simetrías en el fibrado vectorial con respecto a un tensor definido en E. Estas simetrías devienen de la acción de estos subgrupos de Lie.

Otra herramienta importante en la geometría diferencial es la definición de la derivada covariante. Cuya generalización a fibrados vectoriales es una conexión. Esta conexión, en fibrados vectoriales, describe importantes resultados geométricos. Entonces surge una cuestión natural. ¿Cómo es su generalización cuando se trata de fibrados principales?.

Es así que hace aparición una estructura geométrica más amplia. Un fibrado principal y conexión sobre éste; objetivo central de la presente tesis. Que incluye a todos los grupos de Lie, pues es parte esencial en su definición e incorpora, como casos particulares, las diferentes ramas de la geometría diferencial, topología y física. Estos son los tratados que conciernen a éste presente trabajo monográfico, recopilados de la literatura contemporanea.

II. Marco Teórico

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Álgebra multilineal

Estableceremos un campo base $\mathbb{F}$, el cual será el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, en nuestras aplicaciones. Seguiremos principalmente las ideas de (Abraham, R. y Marsden, J.E.; 1978) así como de (Kobayashi, S. y Nomizu, K.; 1963) para desarrollar ésta sección. Todo espacio vectorial que consideraremos serán finito dimensionales sobre $\mathbb{F}$ a menos que se establezca lo contrario. Definamos el *producto tensorial* $U \otimes V$ de dos espacios vectoriales U y V somo sigue. Sea $M(U, V)$ el espacio vectorial que tiene al conjunto $U \times V$ como base, i.e., el espacio vectorial libre generado por los pares (u, v) donde $u \in U$ y $v \in V$. Sea N el subespacio vectorial de $M(U, V)$ generado por elementos de la forma

$$\begin{array}{ccccc} (u+u', v) - (u, v) - (u', v) & , & (u, v+v') - (u, v) - (u, v') & , \\ (ru, v) - r(u, v) & , & (u, rv) - r(u, v) & , \end{array}$$

donde $u, u' \in U,\ v, v' \in V$ y $r \in \mathbb{F}$. Haciendo $U \otimes V = M(U, V)/N$. Para cada par (u, v) considerado como un elemento de $M(U, V)$, su imagen bajo la proyección natural $M(U, V) \to U \otimes V$ será denotado por $u \otimes v$. Se define la *aplicación bilineal canónica* φ de $U \times V$ hacia $U \otimes V$ por

$$\varphi(u, v) = u \otimes v \qquad \text{para } (u, v) \in U \times V.$$

Sea W un espacio vectorial y $\psi : U \times V \to W$ una aplicación bilineal. Decimos que el par (W, ψ) tiene la *propiedad de factorización universal* para $U \times V$ si para cada espacio vectorial S y cada aplicación bilineal $f : U \times V \to S$, existe una única aplicación lineal $g : W \to S$ tal que $f = g \circ \psi$.

Proposición 1.1 *El par $(U \otimes V, \varphi)$ tiene la propiedad de la factorización universal para $U \times V$. Si el par (W, ψ) tiene la propiedad de factorización universal para $U \times V$, entonces $(U \otimes V, \varphi)$ y (W, ψ) son isomorfos en el sentido de que existe un isomorfismo lineal $\sigma : U \otimes V \to W$ tal que $\psi = \sigma \circ \varphi$.*

Demostración: Sea S cualquier espacio vectorial y $f : U \times V \to S$ cualquier aplicación bilineal. Puesto que $U \times V$ es una base para $M(U,V)$, podemos extender f a una única aplicación lineal $f' : M(U,V) \to S$. Como f es bilineal, f' es nulo sobre N. Además, f' induce una aplicación lineal $g : U \otimes V \to S$. Obviamente, $f = g \circ \varphi$. La unicidad de tal aplicación g sigue del hecho de que $\varphi(U \times V)$ genera $U \otimes V$. Sea (W, ψ) un par que tiene la propiedad de la factorización universal para $U \times V$. Por la propiedad de factorización universal de $(U \otimes V, \varphi)$ (respectivamente de (W, ψ)), existe una única aplicación lineal $\sigma : U \otimes V \to W$ (respectivamente $\tau : W \to U \otimes V$) tal que $\psi = \sigma \circ \varphi$ (respectivamente $\varphi = \tau \circ \psi$). Por tanto, $\varphi = \tau \circ \sigma \circ \varphi$ y $\psi = \sigma \circ \tau \circ \psi$. Usando la unicidad de g en la definición de la propiedad de factorización universal, concluimos que $\tau \circ \sigma$ y $\sigma \circ \tau$ son transformaciones identidad de $U \times V$ y W respectivamente.

□

Proposición 1.2 *Existe un único isomorfismo de $U \otimes V$ hacia $V \otimes U$ el cual envía $u \otimes v$ hacia $v \otimes u$ para todo $u \in U$ y $v \in V$.*

Demostración: Sea $f : U \times V \to V \otimes U$ una aplicación bilineal definida por $f(u,v) = v \otimes u$. Por la proposición 1.1, existe una única aplicación lineal $g : U \otimes V \to V \otimes U$ tal que $g(u \otimes v) = v \otimes u$. De modo semejante, existe una única aplicación lineal $g' : V \otimes U \to U \otimes V$ tal que $g'(v \otimes u) = u \otimes v$. Evidéntemente, $g' \circ g$ y $g \circ g'$ son transformaciones identidad de $U \otimes V$ y $V \otimes U$ respectivamente. Por tanto, g es el isomorfismo deseado.

□

La prueba de las siguientes dos proposiciones son similares y por tanto omitidas.

Proposición 1.3 *Si consideramos al campo base $\mathbb{F}$ como un espacio vectorial $1-$dimensional sobre $\mathbb{F}$, hay un único isomorfismo de $\mathbb{F} \otimes U$ sobre U el cual envía $r \otimes u$ hacia ru para todo $r \in \mathbb{F}$ y $u \in U$. Similarmente para $U \otimes \mathbb{F}$ y U.*

Proposición 1.4 *Existe un único isomorfismo de $(U \otimes V) \otimes W$ sobre $U \otimes (V \otimes W)$, el cual envía $(u \otimes v) \otimes w$ hacia $u \otimes (v \otimes w)$ para todo $u \in U, v \in V$ y $w \in W$.*

Por lo tanto, se escribe por practicidad $U \otimes V \otimes W$. Dados los espacios vectoriales $U_1, \ldots, U_k$, el producto tensorial $U_1 \otimes \cdots \otimes U_k$ puede ser definido inductivamente. Sea $\varphi : U_1 \times \cdots \times U_k \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_k$ una aplicación multilineal el cual envía $(u_1, \ldots, u_k)$ hacia $u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$. Entonces, como en la proposición 1.1, el par $(U_1 \otimes \cdots \otimes U_k, \varphi)$ puede ser caracterizado por la propiedad de la factorización universal para $U_1 \times \cdots \times U_k$.

La proposición 1.2 también puede ser generalizado. Para cualquier permutación π de $(1, \ldots, k)$, existe un único isomorfismo de $U_1 \otimes \cdots \otimes U_k$ sobre $U_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes U_{\pi(k)}$ el cual envía $u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$ hacia $u_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\pi(k)}$.

Proposición 1.5 *Dadas las aplicaciones lineales $f_j : U_j \to V_j, j = 1, 2$, existe una única aplicación lineal $f : U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$ tal que $f(u_1 \otimes u_2) = f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$ para todo $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$.*

Demostración: Considerando la aplicación bilineal $U_1 \times U_2 \to V_1 \otimes V_2$ el cual envía (u_1, u_2) hacia $f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$ y aplicando la proposición 1.1.

$\square$

La generalización de la proposición 1.5 al caso con más de dos aplicaciones es obvia. La aplicación f obtenida será denotada por $f_1 \otimes f_2$.

Proposición 1.6 *Si $U_1 + U_2$ denota la suma directa de U_1 y U_2, entonces*

$$(U_1 + U_2) \otimes V \; = \; U_1 \otimes V + U_2 \otimes V \ .$$

semejante,

$$U \otimes (V_1 + V_2) \; = \; U \otimes V_1 + U \otimes V_2 \ .$$

Demostración: Sean $i_1 : U_1 \to U_1 + U_2$ e $i_2 : U_2 \to U_1 + U_2$ inyectivas. Sean $p_1 : U_1 + U_2 \to U_1$ y $p_2 : U_1 + U_2 \to U_2$ proyecciones. Entonces $p_1 \circ i_1$ y $p_2 \circ i_2$ son las transformaciones identidad de U_1 y U_2 respectivamente. Por la proposición 1.5, i_1 y la transformación de V induce una aplicación lineal $\bar{i}_1 : U_1 \otimes V \to (U_1 + U_2) \otimes V$. De modo similar, $\bar{i}_2, \bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ son definidas. Esto implica que $\bar{p}_1 \circ \bar{i}_1$ y $\bar{p}_2 \circ \bar{i}_2$ son las transformaciones identidad de $U_1 \otimes V$ y $U_2 \otimes V$ respectivamente y $\bar{p}_2 \circ \bar{i}_1$ y $\bar{p}_1 \circ \bar{i}_2$ son las aplicaciones cero. Esto prueba al primer isomorfismo. La prueba para el segundo es similar.

$\square$

Por inducción, obtenemos

$$(U_1 + \cdots + U_k) \otimes V \; = \; U_1 \otimes V + \cdots + U_k \otimes V \ .$$

Proposición 1.7 *Si $u_1, \ldots, u_m$ es una base para U y $v_1, \ldots, v_n$ es una base para V, entonces $\{\, u_i \otimes v_j \mid i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n \,\}$ es una base para $U \otimes V$. En particular,* $\dim U \otimes V = \dim U \dim V$.

Demostración: Sea U_i un subespacio $1-$dimensional de U generado por u_i y V_j el subespacio $1-$dimensional de V generado por v_j. Por la proposición 1.6,

$$U \otimes V \; = \; \sum_{i,j} U_i \otimes V_j \ .$$

Por la proposición 1.3, cada $U_i \otimes V_j$ es un espacio vectorial $1-$dimensional generado por $u_i \otimes v_j$.

$\square$

Para un espacio vectorial U, denotemos por U^* al espacio vectorial dual de U. Para $u \in U$ y $u^* \in U^*$, $\langle u, u^* \rangle$ denotará al valor del funcional lineal u^* sobre u.

Proposición 1.8 *Sea $L(U^*, V)$ el espacio vectorial de aplicaciones lineales de U^* hacia V. Entonces existe un único isomorfismo g de $U \otimes V$ sobre $L(U^*, V)$ tal que*

$$(g(u \otimes v))u^* \; = \; \langle u, u^* \rangle v \qquad \text{para todo } u \in U, v \in V \ \ \text{y} \ \ u^* \in U^* \ .$$

Demostración: Considérese la aplicación bilineal $f : U \times V \to L(U^*, V)$ definida por $(f(u,v))u^* = \langle u, u^* \rangle v$ y aplicando la proposición 1.1. Entonces existe una única aplicación lineal $g : U \otimes V \to L(U^*, V)$ tal que $(g(u,v))u^* = \langle u, u^* \rangle v$. Para probar que g es un isomorfismo, sea $u_1, \ldots, u_m$ una base para U, $u_1^*, \ldots, u_m^*$ la base dual para U^* y $v_1, \ldots, v_n$ una base para V. Deberemos mostrar que

$$\{ \ g(u_i \otimes v_j) \mid i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \ \}$$

es linealmente independiente. Si $\sum a_{ij} g(u_i \otimes v_j) = 0$ donde $a_{ij} \in \mathbb{F}$, entonces

$$0 \ = \ \left(\sum a_{ij} g(u_i \otimes v_j) \right) u_k^* \ = \ \sum a_{kj} v_j$$

y, por tanto, todo a_{ij} se anula. Puesto que $\dim U \otimes V = \dim L(U^*, V)$, g es un isomorfismo de $U \times V$ sobre $L(U^*, V)$.

$\square$

Proposición 1.9 *Dados dos espacios vectoriales U y V, existe un único isomorfismo g de $U^* \otimes V^*$ sobre $(U \otimes V)^*$ tal que*

$$(g(u^* \otimes v^*))(u \otimes v) \ = \ \langle u, u^* \rangle \langle v, v^* \rangle$$

para todo $u \in U, u^* \in U^*, v \in V, v^* \in V^*$.

Demostración: Aplicando la proposición 1.1 a la aplicación bilineal $f : U^* \times V^* \to (U \otimes V)^*$ definida por $(f(u^*, v^*))(u \otimes v) = \langle u, u^* \rangle \langle v, v^* \rangle$. Para probar que g es un isomorfismo, tomamos bases para U, V, U^* y V^*; y procedemos como en la proposición 1.8.

$\square$

Ahora definiremos varios espacios tensoriales sobre un espacio vectorial fijado V. Para un entero positivo r, denominaremos a $T^r = V \otimes \cdots \otimes V$ (r veces producto tensorial) como el *espacio tensorial contravariante de grado r*. Un elemento de T^r será llamado de *tensor contravariante de grado r*. Si $r = 1$, T^1 no es nadie más que V. Por convención, consideraremos que T^0 es el campo base $\mathbb{F}$. Similarmente, $T_s = V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ (s veces producto tensorial) es denominado como el *espacio tensorial covariante de grado s* y sus elementos *tensores covariantes de grado s*. Entonces $T_1 = V^*$ y, por convención, $T_0 = \mathbb{F}$.

Deberemos expresar estos tensores en términos de una base de V. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base para V y $e^1, \ldots, e^n$ la base dual para V^*. Por la proposición 1.7, $\{ \ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \mid 1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n \ \}$ es una base para T_r. Cada tensor K contravariante de grado r puede ser expresado de modo único como una combinación lineal

$$K \ = \ \sum_{i_1, \ldots, i_r} K^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \ ,$$

donde $K^{i_1 \cdots i_r}$ son las *componentes* de K con respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$ de V. De modo similar, cada tensor L covariante de grado s puede ser expresado únicamente como una combinación lineal

$$L = \sum_{j_1, \ldots, j_s} L_{j_1 \cdots j_s} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} ,$$

donde $L_{j_1 \ldots j_r}$ son las componentes de L.

Para un cambio de base de V, las componentes de tensores están sujetas a las siguientes transformaciones. Sean $e_1, \ldots, e_n$ y $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ dos bases de V relacionados por la transformación

$$\bar{e}_i = \sum_j A_i^j e_j , \quad i = 1, \ldots, n .$$

El correspondiente cambio de bases de la base dual en V^* es dada por

$$\bar{e}^i = \sum_j B_j^i e^j , \quad i = 1, \ldots, n ,$$

donde $B = (B_j^i)$ es la matriz inversa de la matriz $A = (A_j^i)$, así

$$\sum_j A_j^i B_k^j = \delta_k^i .$$

Si K es un tensor contravariante de grado r, y sus componentes, $K^{i_1 \cdots i_r}$ y $\bar{K}^{i_1 \cdots i_r}$, con respecto a $\{ e_i \}$ y $\{ \bar{e}_i \}$ respectivamente están relacionados por

$$\bar{K}^{i_1 \cdots i_r} = \sum_{j_1, \ldots, j_r} A_{j_1}^{i_1} \cdots A_{j_r}^{i_r} K^{j_1 \cdots j_r} .$$

De modo similar, las componentes de un tensor L covariante de grado s están relacionados por

$$\bar{L}_{i_1 \cdots i_s} = \sum_{j_1, \ldots, j_s} B_{i_1}^{j_1} \cdots B_{i_s}^{j_s} L_{j_1 \cdots j_s} .$$

Definamos al *espacio tensorial del tipo* (r, s), o *espacio tensorial de grado contravariante* r *y de grado covariante* s, como el producto tensorial $T_s^r = T^r \otimes T_s = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$. ($V$: r veces, V^* : s veces). En particular, $T_0^r = T^r$, $T_s^0 = T_s$ y $T_0^0 = \mathbb{F}$. Un elemento de T_s^r es llamado un *tensor del tipo* (r, s), o *tensor de grado contravariante* r *y de grado covariante* s. En términos de una base $e_1, \ldots, e_n$ de V y base dual $e^1, \ldots, e^n$ de V^*, cada tensor K del tipo (r, s) puede ser expresado de modo único como

$$K = \sum_{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s} K_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} .$$

donde $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ son llamados las componentes de K con respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$. Para un cambio de base $\bar{e}_i = \sum_j A^j_i e_j$, tenemos la siguiente transformación de componentes:

$$\bar{K}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \;=\; \sum A^{i_1}_{k_1}\cdots A^{i_r}_{k_r} B^{m_1}_{j_1}\cdots B^{m_s}_{j_s} K^{k_1\cdots k_r}_{m_1\cdots m_s}\;. \tag{1.1}$$

Sea $\boldsymbol{T} = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T^r_s$, así que un elemento de $\boldsymbol{T}$ es de la forma $\sum_{r,s=0}^{\infty} K^r_s$, donde $K^r_s \in T^r_s$ son cero excepto para un número finito de ellos. Deberemos tornar a $\boldsymbol{T}$ una álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$, definiendo el producto de dos tensores $K \in T^r_s$ y $L \in T^p_q$ como sigue. De la propiedad de factorización universal del producto tensorial, implica que existe una única aplicación bilineal de $T^r_s \times T^p_q$ sobre T^{r+p}_{s+q} el cual envía $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^*_1 \otimes \cdots \otimes v^*_s, w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \otimes w^*_1 \otimes \cdots \otimes w^*_q) \in T^r_s \times T^p_q$ hacia $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \otimes v^*_1 \otimes \cdots \otimes v^*_s \otimes w^*_1 \otimes \cdots \otimes w^*_q \in T^{r+p}_{s+q}$. La imagen de $(K, L) \in T^r_s \times T^p_q$ por esta aplicación bilineal será denotado por $K \otimes L$. En términos de componentes, si K es dado por $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ y L es dado por $L^{k_1\cdots k_p}_{m_1\cdots m_q}$, entonces

$$(K \otimes L)^{i_1\cdots i_{r+p}}_{j_1\cdots j_{s+q}} \;=\; K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} L^{i_{r+1}\cdots i_{r+p}}_{j_{s+1}\cdots j_{s+q}}\;.$$

Ahora definiremos la *contracción*. Sea $r, s \geqslant 1$. Para cada par de enteros (i, j) tal que $1 \leqslant i \leqslant r$ y $1 \leqslant j \leqslant s$, asociamos una aplicación lineal, denominada la contracción y denotada por C, de T^r_s sobre T^{r-1}_{s-1} el cual envía $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^*_1 \otimes \cdots \otimes v^*_s$ hacia

$$\langle v_i, v^*_j\rangle v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v^*_1 \otimes \cdots \otimes v^*_{j-1} \otimes v^*_{j+1} \otimes \cdots \otimes v^*_s\;,$$

donde $v_1, \ldots, v_r \in V$ y $v^*_1, \ldots, v^*_s \in V^*$. La unicidad y existencia de C sigue de la propiedad de factorización universal del producto tensorial. En términos de componentes, la contracción C lleva un tensor $K \in T^r_s$ con componentes $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ hacia un tensor $CK \in T^{r-1}_{s-1}$ cuyos componentes son dados por

$$(CK)^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{s-1}} \;=\; \sum_k K^{i_1\cdots k\cdots i_r}_{j_1\cdots k\cdots j_s}\;,$$

donde el superíndice k aparece en la $i-$ésima posición y el subíndice k aparece en la $j-$ésima posición.

Ahora deberemos interpretar tensores como aplicaciones multilineales.

Proposición 1.10 *T_s es isomorfo, de manera natural, al espacio vectorial de todas las aplicaciones $s-$lineales de $V \times \cdots \times V$ hacia $\mathbb{F}$.*

Proposición 1.11 *T^r es isomorfo, de manera natural, al espacio vectorial de todas las aplicaciones $r-$lineales de $V^* \times \cdots \times V^*$ hacia $\mathbb{F}$.*

Demostración: Probaremos sólo la proposición 1.10. Generalizando la proposición 1.9, vemos que $T_r = V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ es el espacio vectorial dual de $T^r = V \otimes \cdots \otimes V$. Por otro lado, sigue de la propiedad de factorización universal del producto tensorial que el espacio de aplicaciones lineales de $T^r = V \otimes \cdots \otimes V$ hacia $\mathbb{F}$ es isomorfo al espacio de aplicaciones $r-$lineales de $V \times \cdots \times V$ hacia $\mathbb{F}$.

$\square$

Siguiendo la interpretación de la proposición 1.10, consideramos un tensor $K \in T_s$ como una aplicación $s-$lineal $V \times \cdots \times V \to \mathbb{F}$ y escribimos $K(v_1, \ldots, v_r) \in \mathbb{F}$ para $v_1, \ldots, v_r \in V$.

Proposición 1.12 T_r^1 *es isomorfo, de un modo natural, al espacio vectorial de todas las aplicaciones* $r-$*lineales de* $V \times \cdots \times V$ *hacia* V.

Demostración: T_r^1 es, por definición, $V \otimes T_r$ el cual es canonicamente isomorfo con $T_r \otimes V$. Por la proposición 1.8, $T_r \otimes V$ es isomorfo al espacio de aplicaciones lineales del espacio dual de T_r, que es T^r, hacia V. También, por la propiedad de factorización universal del producto tensorial, el espacio de aplicaciones lineales de T^r hacia V puede ser identificado con el espacio de aplicaciones $r-$lineales de $V \times \cdots \times V$ hacia V.

$\square$

Con esta interpretación, cualquier tensor K del tipo $(1, r)$ es una aplicación $r-$lineal de $V \times \cdots \times V$ hacia V el cual lleva $(v_1, \ldots, v_r)$ hacia $K(v_1, \ldots, v_r) \in V$. Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base para V, entonces $K = \sum K^i_{j_1 \cdots j_r} e_i \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_r}$ corresponde a una aplicación $r-$lineal de $V \times \cdots \times V$ hacia V tal que $K(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = \sum_i K^i_{j_1 \cdots j_r} e_i$.

Ejemplo 1.1 Si $v \in V$ y $v^* \in V^*$, entonces $v \otimes v^*$ es un tensor del tipo $(1, 1)$. La contracción $C : T_1^1 \to \mathbb{F}$ lleva $v \otimes v^*$ hacia $\langle v, v^* \rangle$. En general, un tensor K del tipo $(1, 1)$ puede ser considerado como un endomorfismo lineal de V y la contracción CK de K es entonces el trazo del correspondiente endomorfismo. En efecto, si $e_1, \ldots, e_n$ es una base para V y K tiene componentes K^i_j con respecto a esta base, entonces el endomorfismo correspondiente a K envía e_j hacia $\sum_i K^i_j e_i$. Cláramente, el trazo de K y la contracción CK de K son ambos iguales a $\sum_i K^i_i$.

Ejemplo 1.2 Un *producto interior* $\mathtt{g}$ sobre un espacio vectorial real V es un tensor covariante de grado 2 el cual satisface (1) $\mathtt{g}(v, v) \geqslant 0$ y $\mathtt{g}(v, v) = 0$ si y sólo si $v = 0$ (positivo definido) y (2) $\mathtt{g}(v, u) = \mathtt{g}(u, v)$ (simétrico).

Sea $T(U)$ y $T(V)$ álgebras tensoriales sobre los espacios vectoriales U y V. Si A es un isomorfismo de U sobre V, entonces su transpuesta A^* es un isomorfismo lineal de V^* sobre U^* y A^{*-1} es un isomorfismo lineal de U^* sobre V^*. Por la proposición 1.4, obtenemos un isomorfismo lineal $A \otimes A^{*-1} : U \otimes U^* \to V \otimes V^*$. En general, obtenemos un isomorfismo lineal de $T(U)$ sobre $T(V)$ el cual transforma $T^r_s(U)$ sobre $T^r_s(V)$. Este isomorfismo, llamado la *extensión* de A y denotado por la misma letra A, es el único isomorfismo entre las álgebras $T(U) \to T(V)$ el cual extiende $A : U \to V$; la unicidad sigue del hecho de que $T(U)$ es generado por $\mathbb{F}, U$ y U^*. Es también facil de verificar que la extensión de A conmuta con cualquier contracción C.

Proposición 1.13 *Existe una correspondencia 1:1 natural entre los isomorfismos de una espacio vectorial U sobre otro espacio vectorial V y el isomorfismo de álgebras de $T(U)$ sobre $T(V)$ el cual preserva tipo y conmuta contracciones.*
En particular, el grupo de automorfismos de V es isomorfo, de manera natural, con el grupo de automorfismos del álgebra tensorial $T(V)$ el cual preserva tipo y conmuta con contracciones.

Demostración: Solamente tenemos que probar que cada isomorfismo de álgebras, digamos f, de $T(U)$ sobre $T(V)$ proviene de un isomorfismo A de U sobre V, teniendo en cuenta que f preserva tipo y conmuta con contracciones. Puesto que f preserva tipo, este lleva $T_0^1(U) = U$ isomórficamente a $T_0^1(V) = V$. Denotando la restricción de f hacia U por A. Como f transforma cada elemento del campo $\mathbb{F} = T_0^0$ en sí mismo y conmuta con cada contracción C, tenemos, para todo $u \in U$ y $u^* \in U^*$,

$$\begin{array}{rclclcl} \langle Au, fu^* \rangle & = & \langle fu, fu^* \rangle & = & C(fu \otimes fu^*) & = & C(f(u \otimes u^*)) \\ & = & f(C(u \otimes u^*)) & = & f(\langle u, u^* \rangle) & = & \langle u, u^* \rangle \ . \end{array}$$

Por tanto, $fu^* = A^{*\,-1}$. La extensión de A y f coinciden sobre $\mathbb{F}, U$ y U^*. Puesto que el álgebra tensorial $T(U)$ es generado por $\mathbb{F}, U$ y U^*, f coincide con la extensión de A.

□

Sea $\boldsymbol{T}$ el álgebra tensorial sobre un espacio vectorial V. Un endomorfismo lineal D de $\boldsymbol{T}$ es denominada una *derivación* si satisface las siguientes condiciones:

(a) D preserva tipo, i.e., D lleva T_s^r en sí misma;

(b) $D(K \otimes L) = DK \otimes L + K \otimes DL$ para todos los tensores K y L;

(c) D conmuta con toda contracción C.

El conjunto de derivaciones de $\boldsymbol{T}$ forma un espacio vectorial. Este forma un álgebra de Lie si hacemos $[D, D'] = DD' - D'D$ para cualesquiera derivaciones D y D'. De modo similar, el conjunto de endomorfismos lineales sobre V forma un álgebra de Lie. Puesto que una derivación D lleva $T_0^1 = V$ en sí misma por (a), este induce un endomorfismo, digamos B, sobre V.

Proposición 1.14 *El álgebra de Lie de derivaciones de $\boldsymbol{T}(V)$ es isomorfo con el álgebra de Lie de endomorfismos de V. El isomorfismo es dado por la asignación de cada derivación con su restricción a V.*

Demostración: Es claro que $D \to B$ es un homomorfísmo de álgebras de Lie. De (b) sigue fácilmente que D lleva cada elemento de $\mathbb{F}$ sobre 0. Por tanto, par $v \in V$ y $v^* \in V^*$, tenemos

$$\begin{array}{rclclcl} 0 & = & D(\langle v, v^* \rangle) & = & D(C(v \otimes v^*)) & = & C(D(v \otimes v^*)) \\ & & & = & C(Dv \otimes v^* + v \otimes Dv^*) & = & \langle Dv, v^* \rangle + \langle v, Dv^* \rangle \ . \end{array}$$

Puesto que $Dv = Bv$, $Dv^* = -B * v^*$ donde B^* es la transpuesta de B. Como $\boldsymbol{T}$ es generado por $\mathbb{F}$, V y V^*, D es únicamente determinado por su restricción a $\mathbb{F}$, V, y V^*. Esto implica que $D \to B$ es inyectivo. Recíprocamente, dado un endomorfismo B de V, definamos $Da = 0$ para $a \in \mathbb{F}$, $Dv = Bv$ para $v \in V$ y $Dv^* = -B^*v^*$ para $v^* \in V^*$ y, entonces, extendiendo D a una derivación de $\boldsymbol{T}$ por (b). La existencia de D sigue de la propiedad de factorización universal del producto tensorial.

□

Ejemplo 1.3 Sea K un tensor del tipo (1,1) y considere este como un endomorfismo de V. Entonces el automorfismo de $\boldsymbol{T}(V)$ inducido por un automorfismo A de V que lleva al tensor K hacia el tensor AKA^{-1}. Por otro lado, la derivación de $\boldsymbol{T}(V)$ inducida por un endomorfismo B de V lleva K sobre $[B, K] = BK - KB$.

1.2. Variedades suaves

1.2.1. Variedad suave

Ésta sección está basado en (Abraham, R. y Marsden, J.E.; 1978) y (Kobayashi, S. y Nomizu, K.; 1963).

Un *pseudogrupo de transformaciones* sobre un espacio topológico $\mathcal{T}$ es un conjunto $\mathcal{A}$ de transformaciones que satisface los siguientes axiomas:

(1) Cada $f \in \mathcal{A}$ es un homeomorfismo de un conjunto abierto (denominado el dominio de f) de $\mathcal{A}$ sobre otro conjunto abierto (denominado el rango de f) de $\mathcal{A}$;

(2) Si $f \in \mathcal{A}$, entonces la restricción de f a un subconjunto abierto arbitrario del dominio de f, está en $\mathcal{A}$;

(3) Si $U = \bigcup_i U_i$ donde cada U_i es un conjunto abierto de $\mathcal{T}$. Un homeomorfismo f de U sobre un conjunto abierto de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{A}$, si la restricción de f a U_i está en $\mathcal{A}$ para cada i;

(4) Para cada conjunto abierto U de $\mathcal{T}$, la transformación identidad de U está en $\mathcal{A}$;

(5) Si $f \in \mathcal{A}$, entonces $f^{-1} \in \mathcal{A}$;

(6) Si $f \in \mathcal{A}$ es un homeomorfismo de U sobre V y $f' \in \mathcal{A}$ es un homeomorfismo de U' sobre V' y si $V \cap U'$ es no vacio, entonces el homeomorfismo $f' \circ f$ de $f^{-1}(V \cap U')$ sobre $f'(V \cap U')$, está en $\mathcal{A}$.

Daremos algunos ejemplos de pseudogrupos los cuales será usados en este presente trabajo. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio de las $n-$uplas de números reales $(x^1, \ldots, x^n)$ con la topología usual. Una aplicación f de un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ es denominado de *clase* C^r, $r = 1, 2, \ldots, \infty$, si f es continuamente r veces diferenciable. Decimos que f es de clase C^0 cuando f es continua. Por clase C^∞ queremos decir que f es real y analítico. El *pseudogrupo* $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$ *de transformaciones de clase* C^r de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de homeomorfismos f de un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que ambos f y f^{-1} son de clase C^r. Obviamente $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$ es un pseudogrupo de transformaciones de $\mathbb{R}^n$. Si $r < s$, entonces $\mathcal{A}^s(\mathbb{R}^n)$ es un subpseudogrupo de $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$. Si consideramos sólo estos $f \in \mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$ cuyos Jacobianos son positivos en todas partes, obtenemos un subpseudogrupo de $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$. Este pseudogrupo, denotado por $\mathcal{A}^r_0(\mathbb{R}^n)$, es denominado el *pseudogrupo de transformaciones que preserva orientación de clase* C^r *de* $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbb{C}^n$ el espacio de $n-$uplas de números complejos con la topología usual. El *pseudogrupo de transformaciones holomorfas (i.e., complejos analíticos) de* $\mathbb{C}^n$ puede ser definido de modo similar y será denotado por $\mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$. Deberemos identificar $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$, cuando fuera necesario, bajo la aplicación $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ hacia $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^{2n}$, donde $z^j = x^j + iy^j$. Sobre esta identificación, $\mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ es un subpseudogrupo de $\mathcal{A}^r_0(\mathbb{R}^{2n})$ para cualquier r.

Un *átlas* de un espacio topológico M compatible con un pseudogrupo $\mathcal{A}$ es una familia de pares (U_i, φ_i), llamados *cartas*, tales que

(a) Cada U_i es un conjunto abierto de M y $\bigcup_i U_i = M$;

(b) Cada φ_i es un homeomorfismo de U_i sobre un conjunto abierto de $\mathcal{T}$;

(c) Siempre que $U_i \cap U_j$ sea no vacio, la aplicación $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sobre $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un elemento de $\mathcal{A}$.

Un *átlas completo* de M compatible con $\mathcal{A}$ es un átlas de M compatible con $\mathcal{A}$ el cual no está contenido en ningún otro átlas de M compatible con $\mathcal{A}$. Cada átlas de M compatible con $\mathcal{A}$ está contenido en un único átlas completo de M compatible con $\mathcal{A}$. En efecto, dado un átlas $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$ de M compatible con $\mathcal{A}$, sea $\tilde{A}$ una familia de pares (U, φ) tal que φ es un homeomorfismo de un conjunto abierto U de M sobre un conjunto abierto de $\mathcal{T}$ y que

$$\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_i) \to \varphi_i(U \cap U_i)$$

es un elemento de $\mathcal{A}$ siempre que $U \cap U_i$ sea no vacio. Entonces $\tilde{A}$ es el átlas completo conteniendo A.

Si $\mathcal{A}'$ es un subpseudogrupo de $\mathcal{A}$, entonces un átlas de M compatible con $\mathcal{A}'$ es compatible con $\mathcal{A}$.

Una *variedad suave* de clase C^r es un espacio de Hausdorff con un átlas completo, préfijado, compatible con $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$. El entero n es denominado como la dimensión de la variedad. Cualquier átlas de un espacio de Hausdorff compatible con $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$, ampliando hacia un átlas completo, se define una estructura diferenciable de clase C^r. Puesto que $\mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}^s(\mathbb{R}^n)$ para $r < s$, una estructura diferenciable de clase C^s define de modo único una estructura diferenciable de clase C^r. Una variedad suave, también dicho diferenciable, de clase C^ω es también denominada una *variedad real analítica.* A lo largo de todo el presente trabajo deberemos considerar variedades suaves de clase C^∞. Por una *variedad suave, variedad diferenciable* o, simplemente, *variedad*, nos referiremos a variedades diferenciables de clase C^∞. Una *variedad compleja (analítica)* de dimensión compleja n es un espacio de Hausdorff con un átlas completo, préfijado, compatible con $\mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$. Una variedad suave *orientada* de clase C^r es un espacio de Hausdorff con un átlas, préfijado, compatible con $\mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^n)$.

Para cualquier estructura bajo consideración (por ejemplo estructura diferenciable de clase C^r), una carta *admisible* es una carta que pertenece a un átlas préfijado completo definiendo la estructura. De ahora en adelante, una carta se entenderá como una carta admisible. Dada una carta admisible (U_i, φ_i) de una variedad M $n-$dimensional de clase C^r, el sistema de funciones $x^1 \circ \varphi, \ldots, x^n \circ \varphi$ definidas sobre U_i son llamados como *sistema de coordenadas locales* sobre U_i. Decimos que U_i es un *entorno coordenado*. Para cada punto $p \in M$, es posible encontrar una carta (U_i, φ_i) tal que $\varphi_i(p)$ esté en el origen de $\mathbb{R}^n$ y φ_i sea un homeomorfismo de U_i sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ definido por $|x^1| < a, \ldots, |x^n| < a$ para algún número positivo a. U_i es entonces denominado como una vecindad cubo de p.

Dadas dos variedades M y M' de clase C^r, una aplicación $f : M \to M'$ es dicha diferenciable de clase C^k, $k \leqslant r$, si, para cada carta (U_i, φ_i) de M y cualquier carta (V_j, ψ_j) de M' tal que $f(U_i) \subset V_j$, la aplicación $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ de $\varphi_i(U_i)$ sobre $\psi_j(V_j)$ es diferenciable de clase C^k. Si $u^1, \ldots, u^n$ es un sistema de coordenadas locales en U_i y $v^1, \ldots, v^m$ es un sistema de coordenadas en V_j, entonces f puede ser expresado por un conjunto de funciones diferenciables de clase C^k:

$$v^1 = f^1(u^1, \ldots, u^n) \ , \ \ldots \ , \ v^m = f^m(u^1, \ldots, u^n) \ .$$

Por una *aplicación diferenciable* nos referiremos a aplicaciones de clase C^∞. Una función diferenciable de clase C^k sobre M es una aplicación de clase C^k de M sobre $\mathbb{R}$. La definición de *aplicaciones holomorfas* recibe un tratamiento similar.

Por una *curva diferenciable* de clase C^k en M, entendemos que se trata de una aplicación diferenciable de clase C^k de un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sobre M, es decir, la restricción de una aplicación diferenciable de clase C^k de un intervalo, conteniendo $[a, b]$, hacia M. Ahora definiremos un *vector tangente* (o simplemente *vector*) en el punto p de M. Sea $\mathfrak{F}(p)$ el álgebra de funciones diferenciables de clase C^1 definidos en una vecindad de p. Sea $\boldsymbol{x}(t)$ una curva de clase C^1, $a \leqslant t \leqslant b$, tal que $\boldsymbol{x}(t_0) = p$. El vector tangente a la curva $\boldsymbol{x}(t)$ en p es una aplicación $X : \mathfrak{F}(p) \to \mathbb{R}$ definida por

$$Xf \ = \ \left(\frac{df(\boldsymbol{x}(t))}{dt} \right)_{t_0} \ .$$

En otras palabras, Xf es la derivada de f en la dirección de la curva $\boldsymbol{x}(t)$ en $t = t_0$. El vector X satisface las siguientes condiciones:

(1) X es una aplicación lineal de $\mathfrak{F}$ hacia $\mathbb{R}$;

(2) $X(fg) \ = \ (Xf)g(p) + f(p)(Xg)$ para $f, g \in \mathfrak{F}(p)$.

El conjunto de aplicaciones X de $\mathbb{F}(p)$ hacia $\mathbb{R}$ satisfaciendo estas dos condiciones forma un espacio vectorial real. Ahora deberemos mostrar que el conjunto de vectores en p es un subespacio vectorial de dimensión n, donde n es la dimensión de M. Sea $u^1, \ldots, u^n$ un sistema de coordenadas locales U de p. Para cada j, $(\partial/\partial u^j)_p$ es una aplicación de $\mathfrak{F}(p)$ hacia $\mathbb{R}$ el cual satisface las condiciones (1) y (2) anteriores. Deberemos mostrar que el conjunto de vectores en p es el espacio vectorial que tiene como base a $(\partial/\partial u^1)_p, \ldots, (\partial/\partial u^n)_p$. Dado cualquier curva $\boldsymbol{x}(t)$ con $p = \boldsymbol{x}(t_0)$, sean $u^j = x^j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, sus ecuaciones en términos del sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$. Entonces

$$(df(\boldsymbol{x}(t))/dt)_{t_0} \;=\; \sum_j (\partial f/\partial u^j)_p \cdot (dx^j(t)/dt)_{t_0} \ ,$$

el cual prueba que cada vector en p es una combinación lineal de $(\partial/\partial u^1)_p, \ldots, (\partial/\partial u^n)_p$. Recíprocamente, dada una combinación lineal $\sum_j \xi^j(\partial/\partial u^j)_p$, considere la curva definida por

$$u^j \;=\; u^j(p) + \xi^j t, \qquad j = 1, \ldots, n \ .$$

Entonces el vector tangente a esta curva en $t = 0$ es $\sum_j \xi^j(\partial/\partial u^j)_p$. Para probar la independencia lineal de $(\partial/\partial u^1)_p, \ldots, (\partial/\partial u^n)_p$, asuma $\sum_j \xi^j(\partial/\partial u^j)_p = 0$. Entonces

$$0 \;=\; \sum_j \xi^j(\partial u^k/\partial u^j)_p \;=\; \xi^k \qquad \text{para } k = 1, \ldots, n \ .$$

Esto completa la prueba de nuestra aseveración. El conjunto de vectores tangentes en p, denotado por T_pM, es denominado el *espacio tangente* de M en p. Las $n-$úplas de los números $\xi^1, \ldots, \xi^n$ es llamado de *componentes* de los vectores $\sum_j \xi^j(\partial/\partial u^j)_p$ con respecto al sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$.

Observación 1.1 Es conocido que si una variedad M es de clase C^∞, entonces T_pM coincide con el espacio de $X : \mathfrak{F}(p) \to \mathbb{R}$ satisfaciendo las condiciones (1) y (2) atrás, donde $\mathfrak{F}(p)$ ahora denota al álgebra de todas las funciones C^∞ entorno de p. De ahora en adelante consideraremos principálmente variedades de clase C^∞ y aplicaciones de clase C^∞.

Un *campo vectorial* X sobre una variedad M es una asignación de un vector X_p a cada punto $p \in M$. Si f es una función diferenciable sobre M, entonces Xf es una función sobre M definida por $(Xf)(p) = X_pf$. Un campo vectorial X es llamado *diferenciable* si Xf es diferenciable para cada función diferenciable f. En términos de un sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$, un campo vectorial X puede ser expresado por $X = \sum \xi^j(\partial/\partial u^j)$, donde los ξ^j son funciones definidas en la vecindad coordenada, llamadas las *componentes* de X con respecto a $u^1, \ldots, u^n$. X es diferenciable si y sólo si sus componentes ξ^j son diferenciables.

Sea $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M. Este es un espacio vectorial real bajo la adisión y multiplicación por un escalar. Si X y Y están en $\mathfrak{X}(M)$, defínese el bracket $[X, Y]$ como una aplicación del anillo de funciones sobre M hacia sí mismo por

$$[X, Y] \;=\; X(Yf) - Y(Xf) \ .$$

Deberemos mostrar que $[X, Y]$ es un campo vectorial. En términos de un sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$, escribimos

$$X \ = \ \sum \xi^j (\partial/\partial^j) \ , \qquad Y = \sum \eta^j (\partial/\partial u^j) \ .$$

Entonces

$$[X, Y]f \ = \ \sum_{j,k} (\xi^k (\partial \eta^j/\partial u^k) - \eta^k (\partial \xi^j/\partial u^k))(\partial f/\partial u^j) \ .$$

Esto significa que $[X, Y]$ es un campo vectorial cuyas componentes con respecto a $u^1, \ldots, u^n$ son dados por $\sum_k (\xi^k (\partial \eta^j/\partial u^k) - \eta^k (\partial \xi^j/\partial u^k))$, $j = 1, \ldots, n$. Con respecto a esta operación de bracket, $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie sobre el campo de los número reales (de dimensión infinita). En particular, tenemos la identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \ = \ 0 \qquad \text{para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \ .$$

También podemos considerar a $\mathfrak{X}(M)$ como un módulo sobre el anillo $\mathfrak{F}(M)$ de funciones diferenciables sobre M como sigue. Si f es una función y X un campo vectorial sobre M, entonces fX es un campo vectorial sobre M definida por $(fX)_p = f(p)X_p$ para $p \in M$. Entonces

$$[fX, gY] \ = \ fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \qquad f, g \in \mathfrak{F}(M), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) \ .$$

Para un punto p de M, el espacio vectorial dual T_p^*M del espacio tangente T_pM es llamado el espacio de *covectores* en p. Una asignación de un covector a cada punto p es llamado una $1-$forma (forma diferencial de grado 1). Para cada función f sobre M, la *diferencial total* $(df)_p$ de f en p está definido por

$$\langle (df)_p, X \rangle \ = \ Xf \qquad \text{para } X \in T_pM \ ,$$

Si $u^1, \ldots, u^n$ es un sistema de coordenadas locales en una vecindad de p, entonces la diferenciales totales $(du^1)_p, \ldots, (du^n)_p$ forman una base para T_p^*M. En efecto, ellos forman la base dual de la base $(\partial/\partial u^1)_p, \ldots, (\partial/\partial u^n)_p$ para T_pM. En una vecindad de p, cada $1-$forma ω puede ser escrita de modo único como

$$\omega \ = \ \sum_j f_j du^j \ ,$$

donde f_j son funciones definidas en un vecindad de p y llamadas las *componentes* de ω con respecto a $u^1, \ldots, u^n$. La $1-$forma ω es dicha *diferenciable* si los f_j son diferenciables (esta condición es independiente de la elección del sistema de coordenadas locales). Y consideraremos solamente $1-$formas diferenciables.

Una $1-$forma ω puede ser definido también como una aplicación $\mathfrak{F}(M)-$lineal del $\mathfrak{F}(M)-$módulo $\mathfrak{X}(M)$ hacia $\mathfrak{F}(M)$. Estas dos definiciones están relacionadas por

$$(\omega(X))_p \ = \ \langle \omega_p, X_p \rangle, \qquad X \in \mathfrak{X}(M), \qquad p \in M \ .$$

Sea $\bigwedge T_p^*M$ el álgebra exterior sobre T_p^*M. Una $r-$forma ω es una asignación de un elemento de grado r en $\bigwedge T_p^*M$ para cada punto p de M. En términos de un sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$, ω puede ser expresado de modo único como

$$\omega \;=\; \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} \omega_{i_1\cdots i_r}\, du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}\;.$$

La $r-$forma ω es dicha *diferenciable* si las componentes $\omega_{i_1\cdots i_r}$ son todas diferenciables. Convengamos que por una $r-$forma nos referiremos a una $r-$forma diferenciable. Una $r-$forma ω también puede ser definido como una aplicación antisimétrica $r-$lineal sobre $\mathfrak{F}(M)$ de $\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)$ (r-veces) hacia $\mathfrak{F}(M)$. Las dos definiciones están relacionadas del siguiente modo. Si $\omega^1, \ldots, \omega^r$ son $1-$formas y $X_1, \ldots, X_r$ son campos vectoriales, entonces $(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r)(X_1, \ldots, X_r)$ es $1/r!$ veces el determinante de la matriz $(\omega^j(X_k))_{j,k=1,\ldots,r}$ de grado r.

Denotaremos por $\Omega^r(M)$ la totalidad de $r-$formas diferenciables sobre M para cada $r = 0, 1, \ldots, n$. Entonces $\Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$. Cada $\Omega^r(M)$ es un espacio vectorial real y puede ser también considerado como un $\mathfrak{F}(M)-$módulo: para $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $\omega \in \Omega^r(M)$, $f\omega$ es una $r-$forma definida por $(f\omega)_p = f(p)\omega_p,\ p \in M$. Denótase $\Omega(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Omega^r(M)$. Con respecto al producto exterior, $\Omega(M)$ forma un álgebra sobre el campo de los números reales. La *diferenciación exterior* d puede se caracterizado como sigue:

(1) d es una aplicación $\mathbb{R}-$lineal de $\Omega(M)$ sobre sí mismo tal que $d(\Omega^r(M)) \subset \Omega^{r+1}(M)$;

(2) Para una función $f \in \Omega^0(M)$, df es la diferencial total;

(3) Si $\omega \in \Omega^r(M)$ y $\eta \in \Omega^s(M)$, entonces

$$d(\omega\wedge\eta) \;=\; d\omega\wedge\eta \;+\; (-1)^r\omega\wedge d\eta;$$

(4) $d^2 = 0$.

En términos de un sistema de coordenadas locales, si $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \omega_{i_1\cdots i_r} du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$, entonces $d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_r} d\omega_{i_1\cdots i_r}\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$.

Será necesario considerar formas diferenciales a valores en un espacio vectorial arbitrario. Sea V un espacio vectorial real $m-$dimensional. Una $r-$forma ω a valores en V sobre M es la asignación a cada punto $p \in M$ una aplicación $r-$lineal antisimétrica de $T_pM\times\cdots\times T_pM$ (r veces) hacia V. Si tomamos una base $e_1, \ldots, e_m$ para V, podemos escribir ω de modo único como $\omega = \sum_{j=1}^m \omega^j\cdot e_j$, donde los ω^j son $r-$formas usuales sobre M. ω es *diferenciable*, por definición, si los ω^j son todos diferenciables. La derivada exterior $d\omega$ está definida como $\sum_{j=1}^m d\omega^j\cdot e_j$, el cual es una $(r+1)-$forma a valores en V.

Dada una aplicación f de una variedad M hacia otra M', la *diferencial* en p de f es la aplicación lineal f_* de T_pM hacia $T_{f(p)}M'$ definida como sigue. Para cada $X \in T_pM$, elíjase una curva $x(t)$ en M tal que X es el vector tangente a la curva $x(t)$ en $p = x(t_0)$. Entonces $f_*(X)$ es el vector tangente a la curva $f(x(t))$ en $f(p) = f(x(t_0))$. Esto implica inmediatamente que si g es una función diferenciable en una vecindad de $f(p)$, entonces $(f_*(X))g = X(g \circ f)$. Cuando sea necesario especificar el punto p, escribiremos $(f_*)_p$. Cuando no haya peligro de confusión, podemos escribir simplemente f a instancia de f_*. La transpuesta de $(f_*)_p$ es una aplicación lineal de $T^*_{f(p)}M'$ hacia T^*_pM. Para cualquier $r-$forma ω' sobre M', definimos una $r-$forma $f^*\omega'$ sobre M por

$$(f^*\omega')(X_1, \ldots, X_r) \;=\; \omega'(f_*X_1, \ldots, f_*X_r), \qquad X_1, \ldots, X_r \in T_pM \;.$$

La diferenciación exterior d conmuta con f^*, i.e., $d(f^*\omega') = f^*(d\omega')$.

Una aplicación f de M hacia M' es dicha que tiene *rango* r en $p \in M$ si la dimensión de $f_*(T_pM)$ es r. Si el rango de f en p es igual a $n = \dim M$, $(f_*)_p$ es inyectiva y $\dim M \leqslant \dim M'$. Si el rango de f en p es igual a $n' = \dim M'$, $(f^*)_p$ es sobreyectiva y $\dim M \geqslant \dim M'$. Por el teorema de la función inversa, tenemos

Proposición 1.15 *Sea f una aplicación de M hacia M' y p un punto de M.*

(1) Si $(f_*)_p$ es inyectiva, existe un sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$ en una vecindad U de p y un sistema de coordenadas locales $v^1, \ldots, v^{n'}$ en una vecindad de $f(p)$ tal que

$$v^i(f(q)) \;=\; u^i(q) \qquad \text{para } q \in U \qquad \text{y} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

En particular, f es un homeomorfismo de U hacia $f(U)$.

(2) Si $(f_*)_p$ es sobreyectiva, existe un sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$ en una vecindad U de p y un sistema de coordenadas locales $v^1, \ldots, v^{n'}$ de $f(p)$ tal que

$$v^i(f(q)) \;=\; u^i(q) \qquad \text{para } q \in U \qquad \text{y} \qquad i = 1, \ldots, n'.$$

En particular, la aplicación $f : U \to M'$ es abierta.

(3) Si $(f_*)_p$ es un isomorfismo lineal de T_pM sobre $T_{f(p)}M'$, entonces f define un homeomorfismo de una vecindad U de p sobre una vecindad V de $f(p)$ y su inversa $f^{-1} : V \to U$ es también diferenciable.

Para la prueba úsese el teorema de la función inversa.

Una aplicación f de M hacia M' es denominada una *inmersión* si $(f_*)_p$ es inyectiva para cada punto p de M. Decimos entonces que M está inmersa en M' por f o que M es una subvariedad inmersa de M'. Cuando una inmersión f es inyectiva, este es denominada un *embebimiento* de M en M'. Decimos entonces que M (o la imagen $f(M)$) es una *subvariedad embebida* (o simplemente un *subvariedad*) de M'. La topología de una subvariedad es en general más fina que la topología relativa inducida de M'. Un subconjunto abierto M de una variedad M', considerado como una subvariedad de M' en un modo natural, es llamado una *subvariedad abierta* de M'.

Un *difeomorfismo* de una variedad M sobre otra variedad M' es un homeomorfismo φ tal que ambos φ y φ^{-1} son diferenciables. Un difeomorfismo de M sobre sí mismo es llamado de *transformación diferenciable* de M. Una transformación φ de M induce un automorfismo φ^* del álgebra $\Omega(M)$ de formas diferenciales sobre M y, en particular, un automorfismo del álgebra $\mathfrak{F}(M)$ de funciones sobre M:

$$(\varphi^* f)(p) \;=\; f(\varphi(p)), \qquad f \in \mathfrak{F}(M), \qquad p \in M \;.$$

Esto también induce un automorfismo φ_* del álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de campos vectoriales por

$$(\varphi_* X)_p \;=\; (\varphi_*)_q(X_q),$$

donde

$$\varphi(q) \;=\; p, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Ellos están relacionados por

$$\varphi^*((\varphi_* X)f) \;=\; X(\varphi^* f) \qquad \text{para } X \in \mathfrak{X}(M) \qquad \text{y} \qquad f \in \mathfrak{F}(M).$$

Aunque cualquier aplicación φ de M hacia M' lleva una forma diferencial ω' sobre M' en una forma diferencial $\varphi^*(\omega')$ sobre M, φ no envía un campo vectorial sobre M hacia un campo vectorial sobre M' en general. Decimos que un campo vectorial X sobre M está *$\varphi-$relacionado* a un campo vectorial X' sobre M' si $(\varphi_*)_p X_p = X'_{\varphi(p)}$ para todo $p \in M$. Si X y Y están $\varphi-$relacionados a X' y Y' respectivamente, entonces $[X, Y]$ está $\varphi-$relacionado a $[X', Y']$.

Una *distribución* D de dimensión r sobre una variedad M es una asignación a cada punto $p \in M$ un subespacio $r-$dimensional $D_p \subset T_pM$. Y este es llamado *diferenciable* si cada punto p tiene una vecindad U y r campos vectoriales sobre U, digamos $X_1, \ldots, X_r$, los cuales forman una base de D_q para cada $q \in U$. El conjunto $X_1, \ldots, X_r$ es denominado como una *base local* para la distribución D en U. Se dice que un campo vectorial X pertenece a D si $X_p \in D_p$ para todo $p \in M$. Finalmente, D es *involutiva* si $[X, Y]$ pertenece a D siempre que dos campos vectoriales X y Y pertenescan a D. Por una distribución siempre se entenderá que se trata de una distribución diferenciable.

Una subvariedad conexa N de M es dicha *variedad integral* de la distribución D si $f_*(T_pN) = D_p$ para todo $p \in N$, donde f es el embebimiento de N en M. Si no existe otra variedad integral de D el cual contenga N, entonces N es llamado de *variedad integral maximal* de D. El teorema clásico de Frobenius puede ser formulado como sigue.

Proposición 1.16 *Sea D una distribución involutiva sobre una variedad M. A través de cada punto $p \in M$, atraviesa una única variedad integral $N(p)$ de D. Cualquier variedad integral a través de p es una subvariedad abierta de $N(p)$.*

Ahora definiremos el producto de dos variedades M y N de dimensión m y n, respectivamente. Si M está definida por un átlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ y N está definida por el átlas $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j)\}$, entonces la estructura diferenciable sobre el espacio topológico

$M \times N$ está definida por una átlas $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}$, donde $\varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ está definida de manera natural. Note que este átlas no es completo aunque lo fueran $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Para cada punto (p, q) de $M \times N$, el espacio tangente $T_{(p,q)}M \times N$ puede ser identificado con la suma directa $T_pM + T_qN$ en un modo natural. Esto es, para $X \in T_pM$ y $Y \in T_qN$, elíjanse las curvas $x(t)$ y $y(t)$ tal que X es tangente a $x(t)$ en $p = x(t_0)$ y Y es tangente a $y(t)$ en $q = y(t_0)$. Entonces $(X, Y) \in T_pM + T_qN$ es identificado con el vector $Z \in T_{(p,q)}M \times N$ el cual es tangente a la curva $z(t) = (x(t), y(t))$ en $(p, q) = (x(t_0), y(t_0))$. Sea $\bar{X} \in T_{(p,q)}M \times N$ un vector tangente a la curva $(x(t), q)$ de $M \times N$ en (p, q). Semejantemente, sea $\bar{Y} \in T_{(p,q)}M \times N$ un vector tangente a la curva $(p, y(t))$ de $M \times N$ en (p, q). En otras palabras, $\bar{X}$ es la imagen de X bajo la aplicación $M \to M \times N$ el cual envía $p' \in M$ hacia (p', q) y $\bar{Y}$ es la imagen de Y bajo la aplicación $N \to M \times N$ el cual envía $q' \in N$ hacia (p, q'). Entonces $Z = \bar{X} + \bar{Y}$, porque para cualquier función f sobre $M \times N$, $Zf = df(x(t), y(t))/dt|_{t=t_0}$ es, por la regla de la cadena, igual a

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t_0))\Big|_{t=t_0} + \frac{d}{dt} f(x(t_0), y(t))\Big|_{t=t_0} = \bar{X}f + \bar{Y}f .$$

De modo más general:

Proposición 1.17 (Fórmula de Leibniz). *Sea φ una aplicación de la variedad producto $M \times N$ hacia otra variedad P. La diferencial φ_* en $(p, q) \in M \times N$ puede ser expresado como sigue. Si $Z \in T_{(p,q)}M \times N$ corresponde a $(X, Y) \in T_pM + T_qN$, entonces*

$$\varphi_*(Z) = \varphi_{1*}(X) + \varphi_{2*}(Y) ,$$

donde $\varphi_1 : M \to P$ *y* $\varphi_2 : N \to P$ *están definidas por*

$$\varphi_1(p') = \varphi(p', q) \quad \text{para } p' \in M \qquad y \qquad \varphi_2(q') = \varphi(p, q') \quad \text{para } q' \in N .$$

Demostración: De la definición de $\bar{X}, \bar{Y}, \varphi_1$ y φ_2 implican que $\varphi_*(\bar{X}) = \varphi_{1*}(X)$ y $\varphi_*(\bar{Y}) = \varphi_{2*}(Y)$. Por tanto, $\varphi_*(Z) = \varphi_*(\bar{X}) + \varphi_*(\bar{Y}) = \varphi_{1*}(X) + \varphi_{2*}(Y)$.

□

Note que si $P = M \times N$ y φ es la transformación identidad, entonces la precedida proposición se reduce a la fórmula $Z = \bar{X} + \bar{Y}$.

Sea X un campo vectorial sobre una variedad M. Una curva $x(t)$ en M es llamada *curva integral* de X si, para cualquier parámetro escogido t_0, el vector $X_{x(t_0)}$ es tangente a la curva $x(t)$ en $x(t_0)$. Para cualquier p_0 de M, existe una única curva integral $x(t)$ de X, definida en $|t| < \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$, tal que $p_0 = x(0)$. En efecto, sea $u^1, \ldots, u^n$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad U de p_0 y por lo cual haciendo $X = \sum \xi^j(\partial/\partial u^j)$ en U. Entonces una curva integral de X es una solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{du^j}{dt} = \xi^j(u^1(t), \ldots, u^n(t)), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Nuestra aseveración sigue del teorema fundamental de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Un grupo a $1-$*parámetro de difeomorfismos* de eM es una aplicación de $\mathbb{R}\times M$ hacia M, $(t,p)\in\mathbb{R}\times M\to\varphi_t(p)\in M$, que satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cada $t\in\mathbb{R}$, $\varphi_t : p\to\varphi_t(p)$ es un difeomorfismo de M;

(2) Para cualesquiera $t,s\in\mathbb{R}$ y $p\in M$, $\varphi_{t+s}(p)=\varphi_t(\varphi_s(p))$.

Cada grupo a $1-$parámetro de difeomorfismos φ_t inducen un campo vectorial X como sigue. Para cada punto $p\in M$, X_p es el vector tangente a la curva $x(t)=\varphi_t(p)$, denominada la *órbita* de p, con $p=\varphi_0(p)$. La órbita $\varphi_t(p)$ en una curva integral de X comenzando en p. Un *grupo local a* $1-$*parámetro de difeomorfismos locales* puede ser definido del siguiente modo, exceptuando a que $\varphi_t(p)$ estará definido sólo para t en una vecindad de 0 y p en un conjunto abierto de M. Siendo más precisos, en un intervalo abierto $I_\epsilon=(-\epsilon,\epsilon)$ y en U un conjunto abierto de M. Un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales definidos sobre $I_\epsilon\times U$ es una aplicación de $I_\epsilon\times U$ sobre M el cual satisface las siguientes condiciones:

(1') Para cada $t\in I_\epsilon$, $\varphi_t :\ p\mapsto\varphi_t(p)$ es un difeomorfismo de U sobre un conjunto abierto $\varphi_t(U)$ de M;

(2') Si $t,s,t+s\in I_\epsilon$ y si $p,\varphi_s(p)\in U$, entonces

$$\varphi_{t+s} \;=\; \varphi_t(\varphi_s(p))\ .$$

Al igual que en el caso de un grupo a $1-$parámetro de difeomorfismos, φ_t induce un campo vectorial X definido sobre U. Ahora probaremos lo recíproco.

Proposición 1.18 *Sea X un campo vectorial sobre una variedad M. Para cada punto p_0 de M, existe una vecindad U de p_0, un número positivo ϵ y un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales $\varphi_t : U\to M$, $t\in I_\epsilon$, el cual induce el campo X dado.*

Diremos que X genera un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales φ_t en una vecindad de p_0. Si existe un grupo a $1-$parámetro (global) de difeomorfismos de M el cual induce X, entonces decimos que X es *completo*. Si $\varphi_t(p)$ está definido sobre $I_\epsilon\times M$ para algún ϵ, entonces X es completo.

Demostración:

Sea $u^1,\ldots,u^n$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad W de p_0 tal que $u^1(p_0)=\cdots=u^n(p_0)=0$. Sea $X=\sum\xi^i(u^1,\ldots,u^n)(\partial/\partial u^i)$ en W. Considerando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales:

$$\frac{df^i}{dt} \;=\; \xi^i(f^1(t),\ldots,f^n(t)), \qquad i=1,\ldots,n$$

con funciones desconocidas $f^1(t), \ldots, f^n(t)$. Por el teorema fundamental para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe un conjunto de funciones $f^1(t;u), \ldots, f^n(t;u)$, definidos para $u = (u^1, \ldots, u^n)$ con $|u^j| < \delta_1$ y para $|t| < \epsilon_1$, el cual forma una solución de la ecuación diferencial para cada u fijado y satisfaciendo la condición inicial:

$$f^i(0;u) = u^i .$$

Sea $\varphi_t(u) = (f^1(t;u), \ldots, f^n(t;u))$ para $|t| < \epsilon_1$ y u en $U_1 = \{u \mid |u^i| < \delta_1\}$. Si $|t|$, $|s|$ y $|t+s|$ son todos menores que ϵ_1 y ambos u y $\varphi_s(u)$ están en U_1, entonces las funciones $g^i(t) = f^i(t+s;u)$ son simplemente vistos como una solución de la ecuación diferencial con condición inicial $g^i(0) = f^i(s;u)$. Por la unicidad de la solución, tenemos $g^i(t) = f^i(t;\varphi_s(u))$. Esto prueba que $\varphi_t(\varphi_s(u)) = \varphi_{t+s}(u)$. Puesto que φ_0 es el difeomorfismo identidad de U_1, existe $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que, para $U = \{u \mid |u^i| < \delta\}$, $\varphi_t(U) \subset U_1$ si $|t| < \epsilon$. Por tanto, $\varphi_{-t}(\varphi_t(u)) = \varphi_t(\varphi_{-t}(u)) = \varphi_0(u) = u$ para cada $u \in U$ y $|t| < \epsilon$. Esto prueba que φ_t es un difeomorfismo de U para $|t| < \epsilon$. Así, φ_t es un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales definidos sobre $I_\epsilon \times U$. De la construcción de φ_t, es obvio que φ_t induce el campo vectorial X dado sobre U.

□

Observación 1.2 En el transcurso de la precedida prueba, mostramos también que si dos grupos locales a $1-$parámetro de difeomorfismos locales φ_t y ψ_t definidos sobre $I_\epsilon \times U$ inducen el mismo campo vectorial sobre U, ellos coinciden sobre U.

Proposición 1.19 *Sobre una variedad compacta M, cada campo vectorial X es completa.*

Demostración: Para cada punto $p \in M$, sea $U(p)$ una vecindad de p y $\epsilon(p)$ un número positivo tal que el campo vectorial X genera un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales φ_t sobre $I_{\epsilon(p)} \times U(p)$. Puesto que M es compacta, el cubrimiento abierto $\{U(p) \mid p \in M\}$ tiene un subcubrimiento finito $\{U(p_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon(p_1), \ldots, \epsilon(p_k)\}$. Es claro que $\varphi_t(p)$ está definida sobre $I_\epsilon \times M$ y, por tanto, sobre $\mathbb{R} \times M$.

□

En lo que sigue, no daremos explícitamente un dominio de definición de un campo vectorial X dado y del correspondiente grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales φ_t. Cada fórmula es válida siempre que este tenga sentido, y sea sencillo de especificar, si fuera necesario, el dominio de definición de los campos vectoriales o difeomorfismos envueltos.

Proposición 1.20 *Sea φ un difeomorfismo de M. Si un campo vectorial X genera un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales φ_t, entonces el campo vectorial $\varphi_* X$ genera $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$.*

Demostración: Es claro que $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$ es un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales. Para mostrar que esto induce el campo vectorial $\varphi_* X$, sea p un punto arbitrario de M y $q = \varphi^{-1}(p)$. Puesto que φ_t induce X, el vector $X_q \in T_q M$ es tangente a la curva $x(t) = \varphi_t(q)$ en $q = x(0)$. Esto implica que el vector

$$(\varphi_* X)_p \;=\; \varphi_*(X_q) \;\in\; T_p M$$

es tangente a la curva $y(t) = \varphi \circ \varphi_t(q) = \varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}(p)$.

□

Corolario 1.1 *Un campo vectorial X es invariante por φ, i.e., $\varphi_* X = X$, si y sólo si φ conmuta con φ_t.*

Ahora daremos una interpretación geométrica del bracket $[X, Y]$ de dos campos vectoriales.

Proposición 1.21 *Sean X y Y campos vectoriales sobre M. Si X genera un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales φ_t, entonces*

$$[X, Y] \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y - (\varphi_t)_* Y] \;.$$

Siendo más precisos,

$$[X, Y]_p \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y_p - ((\varphi_t)_* Y)_p], \qquad p \in M \;.$$

El límite sobre el lado derecho es tomado con respecto a la topología natural del espacio vectorial tangente $T_p M$. Primero probaremos dos lemas.

Lema 1.1 *Si $f(t, p)$ es una función sobre $I_\epsilon \times M$, donde I_ϵ es un intervalo abierto $(-\epsilon, \epsilon)$, tal que $f(0, p) = 0$ para todo $p \in M$, entonces existe una función $g(t, p)$ sobre $I_\epsilon \times M$ tal que $f(t, p) = t \cdot g(t, p)$. Más aun, $g(0, p) = f'(0, p)$, donde $f' = \partial f / \partial t$, para $p \in M$.*

Demostración: Es suficiente definir

$$g(t, p) \;=\; \int_0^1 f'(ts, p) ds \;.$$

□

Lema 1.2 *Sea X generando φ_t. Para cualquier función f sobre M, existe una función $g_t(p) = g(t, p)$ tal que $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$ y $g_0 = Xf$ sobre M.*

La función $g(t, p)$ está definida, para cada fijado $p \in M$, en $|t| < \epsilon$ para algún ϵ.

Demostración: Considere $f(t, p) = f(\varphi_t(p)) - f(p)$ y aplique el lema anterior. Entonces $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$. Tenemos

$$(Xf)_p \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(\varphi_t(p)) - f(p)] \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} f(t, p) \;=\; \lim_{t \to 0} g_t(p) \;=\; g_0(p) \;.$$

□

Demostración de la Proposición 1.21. Dada una función f sobre M, considerar una función g_t tal que $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$ y $g_0 = Xf$ (por el último lema). Seaa $p(t) = \varphi_t^{-1}(p)$. Entonces

$$((\varphi_t)_* Y)_p f \;=\; (Y(f \circ \varphi_t))_{p(t)} \;=\; (Yf)_{p(t)} + t \cdot (Y g_t)_{p(t)}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y - (\varphi_t)_* Y]_p f &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(Yf)_p - (Yf)_{p(t)}] - \lim_{t \to 0}(Y g_t)_{p(t)} \\
&= X_p(Yf) - Y_p\, g_0 \\
&= [X, Y]_p f \ ,
\end{aligned}$$

probando nuestra aseveración.

□

Corolario 1.2 *Con las mismas condiciones de la proposición 1.21, tenemos en un modo más general*

$$(\varphi_s)_*[X, Y] \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y - (\varphi_{s+t})_* Y]$$

para cualquier valor de s.

Demostración:

Para un valor fijado de s, considere el campo vectorial $(\varphi_s)_* Y$ y aplicando la proposición 1.21. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
[X, (\varphi_s)_* Y] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y - (\varphi_t)_* \circ (\varphi_s)_* Y] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y - (\varphi_{s+t})_* Y] \ ,
\end{aligned}$$

pues $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$. Por otro lado, $(\varphi_s)_* X = X$ por el corolario 1.1. Puesto que $(\varphi_s)_*$ preserva el bracket, obtenemos

$$(\varphi_s)_*[X, Y] \;=\; [X, (\varphi_s)_* Y] \ .$$

□

Observación 1.3 La conclusión de este corolario puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t)_* Y \Big|_{t=s} \;=\; -\,(\varphi_s)_*[X, Y] \ .$$

Corolario 1.3 *Supóngase que X y Y generan los grupos locales a $1-$parámetro φ_t y ψ_s, respectivamente. Entonces $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ para cada s y t si y sólo si $[X, Y] = 0$.*

Demostración:

Si $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ para cada s y t, Y es invariante para cada φ_t por el corolario 1.1. Por la proposición 1.21, $[X,Y] = 0$. Recíprocamente, si $[X,Y] = 0$, entonces $d((\varphi_t)_* Y)/dt = 0$ para cada t por el corolario anterior. Además, $(\varphi_t)_* Y$ es un vector constante para cada punto p así que Y es invariante para cada φ_t. Por el corolario 1.1, cada ψ_s conmuta con cada φ_t. $\square$

1.2.2. Campos tensoriales

Sea el álgebra tensorial $\boldsymbol{T}(p) = \bigoplus_{r,s=0}^{n} T_s^r(T_pM) = \bigoplus_{r,s=0}^{n} T_s^r(p)$, sobre el espacio tangente T_pM en el punto p de una variedad M. Un *campo tensorial del tipo* (r,s) sobre un subconjunto N de M es una asignación de un tensor $K_p \in T_s^r(p)$ para cada punto p de N. En una vecindad coordenada U con un sistema de coordenada local $x^1, \ldots, x^n$, haciendo $X_i = \partial/\partial x^i$, $i = 1, \ldots, n$, como una base para cada espacio tangente T_pM, $p \in U$, y $\omega^i = dx^i$, $i = 1, \ldots, n$, como la base dual de T_p^*M. Un campo tensorial K del tipo (r,s) definido sobre U entonces es expresado por

$$K_p \;=\; \sum K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s} \;,$$

donde $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ son funciones sobre U, denominadas las *componentes* de K con respecto al sistema de coordenada local $x^1, \ldots, x^n$. Decimos que K es de clase C^k si sus componentes $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ son funciones de clase C^k; de hecho, tiene que ser verificado que esta noción es independiente de la elección de un sistema de coordenadas locales. Es simple de hacer por medio de la fórmula 1.1 donde la matriz (A^i_j) es reemplazada por la matriz Jacobiana entre dos sistemas de coordenadas locales. De ahora en adelante usaremos el término campo tensorial para referiremos que son de clase C^∞ a menos que establezcamos lo contrario.

Proposición 1.22 *Un campo tensorial K del tipo $(0,r)$ (respectivamente del tipo $(1,r)$) sobre M puede ser considerado como una aplicación $r-$lineal de $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)$ hacia $\mathfrak{F}(M)$ (resp. $\mathfrak{X}(M)$) tal que*

$$K(f_1K_1, \ldots, f_rX_r) \;=\; f_1 \cdots f_r \; K(X_1, \ldots, X_r) \qquad \text{para } f_i \in \mathfrak{F}(M) \;\; \text{y} \;\; X_i \in \mathfrak{X}(M) \;.$$

Recíprocamente, y tal aplicación puede ser considerado como un campo tensorial del tipo $(0,r)$ (resp. del tipo $(1,r)$).

Demostración:

Dado un campo tensorial K del tipo $(0,r)$ (resp. tipo $(1,r)$), K_p es una aplicación $r-$lineal de $T_pM \times \cdots \times T_pM$ hacia $\mathbb{R}$ (resp. T_pM) y por tanto $(X_1, \ldots, X_r) \mapsto (K(X_1, \ldots, X_r))_p = K_p((X_1)_p, \ldots, (X_r)_p)$ es una aplicación $r-$lineal de $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)$ hacia $\mathfrak{F}(M)$ (resp. $\mathfrak{X}(M)$) satisfaciendo la precedida condición. Recíprocamente, sea $K : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ (resp. $\mathfrak{X}(M)$) una aplicación $r-$lineal sobre $\mathfrak{F}(M)$. El punto esencial de la prueba es mostrar que el valor de la función (resp. el campo vectorial) $K(X_1, \ldots, X_r)$ en el punto p depende sólo del valor de X_i en el punto p. Esto implicará que K induce una aplicación $r-$lineal de $T_pM \times \cdots \times T_pM$ hacia $\mathbb{R}$ (resp. T_pM) para cada p. Primero observemos que la aplicación K puede ser localizado. Es decir, tenemos

Lema 1.3 *Si $X_i = Y_i$ en una vecindad U de p para $i = 1, \ldots, r$, entonces tenemos que*

$$K(X_1, \ldots, X_r) \;=\; K(Y_1, \ldots, Y_r) \quad \textit{en } U \;.$$

Demostración del lema. Es suficiente mostrar que si $X_1 = 0$ en U, entonces $K(X_1, \ldots, X_r) = 0$ en U. Para cualquier $y \in U$, sea f una función diferenciable sobre M tal que $f(y) = 0$ y $f = 1$ fuera de U. Entonces $X_1 = fX_1$ y $K(X_1, \ldots, X_r) = fK(X_1, \ldots, X_r)$, el cual es nulo en y. Esto prueba el lema.

Para completar la prueba de la proposición, es suficiente mostrar que si X_1 se anula en un punto p, así lo hace $K(X_1, \ldots, X_r)$. Sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenas local entorno de p, así que $X_1 = \sum_i f^i(\partial/\partial x^i)$. Podemos tomar campos vectoriales Y_i y funciones diferenciables g^i sobre M tal que $g^i = f^i$ y $Y_i = (\partial/\partial x^i)$ para $i = 1, \ldots, n$ en alguna vecindad U de p. Entonces $X_1 = \sum_i g^i Y_i$ en U. Por el lema, $K(X_1, \ldots, X_r) = \sum_i g^i \cdot K(Y_i, X_2, \ldots, X_r)$ en U. Puesto que $g^i(p) = f^i(p) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, $K(X_1, \ldots, X_r)$ es nulo en p. □

Ejemplo 1.4 Una *métrica Riemanniana* (definida positiva) sobre M es un campo tensorial covariante g de grado 2 que satisface (1) $\mathsf{g}(X, X) \geqslant 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, y $\mathsf{g}(X, X) = 0$ si y sólo si $X = 0$ y (2) $\mathsf{g}(Y, X) = \mathsf{g}(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. En otras palabras, g asigna un producto interior en cada espacio tangente T_pM, $p \in M$. En términos de un sistema de coordenadas local $x^1, \ldots, x^n$, las componentes de g son dadas por $\mathsf{g}_{ij} = \mathsf{g}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$. Así, g se puede configurar para escribir $ds^2 = \sum \mathsf{g}_{ij} dx^i dx^j$.

Ejemplo 1.5 Una forma diferencial ω de grado r no es más que un campo tensorial covariante de grado r el cual es antisimétrico:

$$\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r)}) \;=\; \epsilon(\pi)\, \omega(X_1, \ldots, X_r) \;,$$

donde π es una permutación arbitraria de $(1, 2, \ldots, r)$ y $\epsilon(\pi)$ es su signo. Para cualquier tensor covariante K en p o cualquier campo tensorial K sobre M, definimos una *alternación* A como sigue:

$$(AK)(X_1, \ldots, X_r) \;=\; \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \epsilon(\pi) \cdot K(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r)}) \;,$$

donde la suma es hecha sobre todas las permutaciones π de $(1, 2, \ldots, r)$. Es fácil verificar que AK es antisimétrico si y sólo si $AK = K$. Si ω y ω' son formas diferenciales de grado r y s respectivamente, entonces $\omega \otimes \omega'$ es un campo tensorial covariante de grado $r + s$ y $\omega \wedge \omega' = A(\omega \otimes \omega')$.

Ejemplo 1.6 Una *simetrización* S puede ser definido como sigue. Si K es un tensor covariante o campo tensorial de grado r, entonces

$$(SK)(X_1, \ldots, X_r) \;=\; \frac{1}{r!}\sum_{\pi} K(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r)}) \;.$$

Para cualquier K, SK es simétrico y $SK = K$ si y sólo si K es simétrico.

Ahora procederemos a definir la noción de *diferenciación de Lie*. Sea $\boldsymbol{T}^r_s(M)$ el conjunto de campos tensoriales del tipo (r, s) definidos sobre M y sea $\boldsymbol{T}(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \boldsymbol{T}^r_s(M)$. Entonces $\boldsymbol{T}(M)$ es un álgebra sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$, la multiplicación $\otimes$ está definida de modo puntual, i.e., si $K, L \in \boldsymbol{M}$ entonces $(K \otimes L)_p = K_p \otimes L_p$ para todo $p \in M$. Si φ es un difeomorfismo de M, su diferencial φ_* da un isomorfismo lineal del espacio tangente $T_{\varphi^{-1}(p)}M$ sobre el espacio tangente T_pM. Este isomorfismo lineal puede ser extendido a un isomorfismo del álgebra $\boldsymbol{T}(\varphi^{-1}(p))$ sobre el álgebra tensorial $\boldsymbol{T}(x)$, al cual denotaremos por $\tilde{\varphi}$. Dado un campo tensorial K, definimos un campo tensorial $\tilde{\varphi}K$ por

$$(\tilde{\varphi}K)_p \;=\; \tilde{\varphi}(K_{\varphi^{-1}(p)}), \qquad p \in M \;.$$

De este modo, cada difeomorfismo φ de M induce un automorfismo de álgebras de $\boldsymbol{T}(M)$ el cual preserva tipo y conmuta con contracciones.

Sea X un campo vectorial sobre M y φ_t un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales generado por X. Definiremos la *derivada de Lie L_XK de un campo tensorial K con respecto a un campo tensorial X* somo sigue. En aras de la simplicidad, asumamos que φ_t es un grupo a $1-$parámetro de difeomorfismos globales de M; no existe dificultad en modificar la definición cuando X es no completo. Para cada t, $\tilde{\varphi}_t$ es un automorfismo del álgebra $\boldsymbol{T}(M)$. Para cualquier campo tensorial K sobre M, hacemos

$$(L_XK)_p \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[K_p - (\tilde{\varphi}_t K)_p\right] \;.$$

La aplicación L_X lleva $\boldsymbol{T}(M)$ en sí mismo el cual envía K hacia L_XK y es llamado la *diferenciación de Lie con respecto a X*. Tenemos la siguiente

Proposición 1.23 *La diferenciación de Lie L_X con respecto a un campo vectorial X satisface las siguientes condiciones:*

(a) L_X es una derivación en $\boldsymbol{T}(M)$, i.e., es lineal y satisface

$$L_X(K \otimes K') \;=\; (L_XK) \otimes K' + K \otimes (L_XK')$$

para todo $K, K' \in \boldsymbol{T}(M)$;

(b) L_X preserva tipo: $L_X(\boldsymbol{T}^r_s(M)) \subset \boldsymbol{T}^r_s(M)$;

(c) L_X conmuta con cada contracción de un campo tensorial;

(d) $L_Xf = Xf$ para cada función f;

(e) $L_X Y = [X, Y]$ *para cada campo vectorial* Y.

Demostración: Es claro que L_X es lineal. Sea φ_t un grupo local a 1−parámetro de difeomorfismos locales generados por X. Entonces

$$\begin{aligned} L_X(K \otimes K') &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - \tilde{\varphi}_t(K \otimes K')] \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - (\tilde{\varphi}_t K) \otimes (\tilde{\varphi}_t K')] \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - (\tilde{\varphi}_t K) \otimes K'] \\ &\quad + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\tilde{\varphi}_t K) \otimes K' - (\tilde{\varphi}_t K) \otimes (\tilde{\varphi}_t K')] \\ &= (L_X K) \otimes K' + K \otimes (L_X K') \ . \end{aligned}$$

Puesto que $\tilde{\varphi}_t$ preserva tipo y conmuta con contracciones, así lo hace L_X. Si f es una función sobre M, entonces

$$(L_X f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(p) - f(\varphi_t^{-1}(p))] = -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\varphi_t^{-1}(p)) - f(p)] \ .$$

Si reparamos que $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ es un grupo local a 1−parámetro de difeomorfismos locales generados por $-X$, vemos que $L_X f = -(-X)f = Xf$. Los demás puntos ya los tratamos en parágrafos anteriores. □

Por una *derivación* en $\boldsymbol{T}(M)$, se entiende por aquella aplicación de $\boldsymbol{T}(M)$ en sí mismo la cual satisface las condiciones (a), (b) y (c) de la proposición 1.23.

Sea S un campo tensorial del tipo $(1,1)$. Para cada $p \in M$, S_p es un endomorfismo lineal del espacio tangente T_pM. Por la proposición 1.8, S_p puede ser extendido de modo único a una derivación del álgebra tensorial $\boldsymbol{T}(p)$ sobre T_pM. Para cada campo tensorial K, defínese SK por $(SK)_p = S_p K_p$, $p \in M$. Entonces S es una derivación en $\boldsymbol{T}(M)$. Así tenemos la siguiente

Proposición 1.24 *Cada derivación* D *en* $\boldsymbol{T}(M)$ *puede ser expresado de modo único como sigue:*

$$D = L_X + S \ ,$$

donde X *es un campo vectorial y* S *es un campo tensorial del tipo* $(1,1)$.

Demostración: Puesto que D preserva tipo, este lleva $\mathfrak{F}(M)$ en sí mismo y satisface $D(fg) = Df \cdot g + f \cdot Dg$ para $f, g \in \mathfrak{F}(M)$. Esto implica que existe un campo vectorial X tal que $Df = Xf$ para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$. Claramente, $D - L_X$ es una derivación en $\boldsymbol{T}(M)$ el cual es cero sobre $\mathfrak{F}(M)$. Deberemos mostrar que cualquier derivación D el cual es cero sobre $\mathfrak{F}(M)$ es inducida por un campo tensorial del tipo $(1,1)$. Para cualquier campo vectorial Y, DY es un campo vectorial y, para cualquier función f, $D(fY) = Df \cdot Y + f \cdot DY = f \cdot DY$, pues $Df = 0$ por asunción. Por la proposición 1.22, existe un único campo tensorial S del tipo $(1,1)$ tal que $DY = SY$ para cada campo vectorial Y. Para mostrar que D coincide con la derivación tensorial inducida por S, es suficiente probar el siguiente

Lema 1.4 *Dos derivaciones D_1 y D_2 en $\boldsymbol{T}(M)$ coinciden si y sólo si coinciden sobre $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$.*

Demostración: Primero observemos que una derivación D puede ser localizado, que es, si un campo tensorial K se anula sobre un conjunto abierto U, entonces DK se anula sobre U. En efecto, para cada $p \in U$ sea f una función tal que $f(p) = 0$ y $f = 1$ fuera de U. Entonces $K = f \cdot K$ y por tanto $DK = Df \cdot K + f \cdot DK$. Como K y f se anulan en p, así lo hace DK. Esto implica que si dos campos tensorial K y K' coinciden sobre un conjunto abierto, entonces DK y DK' coinciden sobre U.

Sea $D = D_1 + D_2$. Nuestro problema es ahora probar que si una derivación D es cero sobre $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$, entonces este es cero sobre $\boldsymbol{T}(M)$. Sea K un campo tensorial del tipo (r, s) y p un punto arbitrario de M. Para mostrar que DK se anula en p, sea V una vecindad coordenada para p con un sistema de coordenadas local $x^1, \ldots, x^n$ y sea

$$K \;=\; \sum K^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}\, X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s} \ ,$$

donde $X_i = \partial/\partial x^i$ y $\omega^j = dx^j$. Podemos extender $K^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$, X_i y ω^j a M y asumamos que la igualdad se toma en una pequeña vecindad U de p. Puesto que D puede ser localizado, es suficiente mostrar que

$$D(K^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}) \;=\; 0 \ .$$

Mas esto sucederá una vez que mostremos que $D\omega = 0$ para cada $1-$forma ω sobre M. Sea Y cualquier campo vectorial y $C : \boldsymbol{T}^1_1(M) \to \mathfrak{F}(M)$ la contracción obvia que hace $C(Y \otimes \omega) = \omega(Y)$ una función. Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcccccc} 0 & = & D(C(Y \otimes \omega)) & = & C(D(Y \otimes \omega)) & & \\ & = & C(DY \otimes \omega) + C(Y \otimes D\omega) & = & C(Y \otimes D\omega) & = & (D\omega)(Y) \ . \end{array}$$

Puesto que esto se toma para cada campo vectorial Y, tenemos que $D\omega = 0$.

□

El conjunto de todas las derivaciones de $\boldsymbol{T}(M)$ forma un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ (de dimensión infinita) con respecto a la adición natural y multiplicación y la operación bracket definida por $[D, D']K = D(D'K) - D'(DK)$. También tenemos como consecuencia que el conjunto de todos los campos tensoriales S del tipo $(1, 1)$ foman un subálgebra del álgebra de Lie de derivaciones de $\boldsymbol{T}(M)$. En la prueba de la proposición 1.24, mostramos que una derivación de $\boldsymbol{T}(M)$ es inducida por un campo tensorial del tipo $(1, 1)$ si y sólo si es cero sobre $\mathfrak{F}(M)$. Esto implica inmediatamente que si D es una derivación de $\boldsymbol{T}(M)$ y S un campo tensorial del tipo $(1, 1)$, entonces $[D, S]$ es cero sobre $\mathfrak{F}(M)$ y, por tanto, es inducida por un campo tensorial del tipo $(1, 1)$. En otras palabras, *el conjunto de campos tensoriales del tipo* $(1, 1)$ *es un ideal del álgebra de Lie de derivaciones de* $\boldsymbol{T}(M)$. Así como *el conjunto de deferenciaciones de Lie L_X, $X \in \mathfrak{X}(M)$, forman un subálgebra del álgebra de derivaciones de $\boldsymbol{T}(M)$.* Esto sigue de la siguiente

Proposición 1.25 *Para cualesquier campos vectoriales X y Y, se tiene*

$$L_{[X,Y]} \;=\; [L_X, L_Y] \;.$$

Demostración: En virtud del lema anterior, es suficiente mostrar que $[L_X, L_Y]$ tiene el mismo efecto como $L_{[X,Y]}$ sobre $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$. Para $f \in \mathfrak{F}(M)$, tenemos que

$$[L_X, L_Y]f \;=\; XYf - YXf = [X,Y]f \;=\; L_{[X,Y]}f \;.$$

Para $Z \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que

$$[L_X, L_Y]Z \;=\; [X,[Y,Z]] - [Y,X,Z] \;=\; [[X,Y],Z]$$

por la identidad de Jacobi.

□

Proposición 1.26 *Sea K un campo tensorial del tipo $(1,r)$ el cual interpretamos como en la proposición 1.22. Para cualquier campo vectorial X, entonces tenemos que*

$$(L_X)(Y_1,\ldots,Y_r) \;=\; [X, K(Y_1,\ldots,Y_r)] - \sum_{i=1}^{r} K(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_r) \;.$$

Demostración: Tenemos

$$K(Y_1,\ldots,Y_r) \;=\; C_1\cdots C_r(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_r\otimes K) \;,$$

donde $C_1,\ldots,C_r$ son obvias contracciones. Usando las condiciones (a) y (c) de la proposición 1.23, tenemos que, para cualquier derivación D de $\boldsymbol{T}(M)$,

$$\begin{aligned} D(K(Y_1,\ldots,Y_r)) \;&=\; (DK)(Y_1,\ldots,Y_r) \\ &\quad + \sum_i K(Y_1,\ldots,DY_i,\ldots,Y_r) \;. \end{aligned}$$

Si $D = L_X$, entonces (e) de la proposición 1.23 implican la conclusión de la prueba.

□

Proposición 1.27 *Sea φ_t un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales generados por un campo vectorial X. Para cualquier campo tensorial K, tenemos*

$$\tilde{\varphi}_s(L_X K) \;=\; -\left(\frac{d}{dt}(\tilde{\varphi}_t K)\right)_{t=s} \;.$$

Demostración: Por definición,

$$L_X \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[K - \tilde{\varphi}_t K] \;.$$

Reemplazando K por $\tilde{\varphi}_s$, obtenemos

$$L_X(\tilde{\varphi}_s K) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\tilde{\varphi}_s K - \tilde{\varphi}_{s+t}K] \;=\; -\left(\frac{d}{dt}(\tilde{\varphi}_t K)\right)_{t=s} .$$

Nuestro problema es además probar que $\tilde{\varphi}_s(L_X K) = L_X(\tilde{\varphi}_s K)$, i.e., $L_X K = \tilde{\varphi}_s^{-1}\circ L_X\circ\tilde{\varphi}_s(K)$ para todo campo tensorial K. Es una verificación directa y ver que $\tilde{\varphi}_s^{-1}\circ L_X\circ\tilde{\varphi}_s(K)$ es una derivación de $\boldsymbol{T}(M)$. Como en las pruebas anteriores, es suficiente probar que L_X y $\tilde{\varphi}_s^{-1}\circ L_X\circ\tilde{\varphi}_s(K)$ coinciden sobre $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$. Primero reparemos que, por lo ya visto, estos coinciden sobre $\mathfrak{X}(M)$. El hecho de que coincidan sobre $\mathfrak{F}(M)$ sigue de las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi^*((\varphi_* X)f) &= X(\varphi^* f) , \\ \tilde{\varphi}^{-1} f &= \varphi^* f , \end{aligned}$$

los cuales se toman para cada difeomorfismo φ de M y de $(\varphi_s)_* X = X$.

□

Corolario 1.4 *Un campo tensorial K es invariante por φ_t para cada t si y sólo si $L_X K = 0$.*

Sea $\Omega^r(M)$ el espacio de formas diferenciales de grado r definidos sobre M, i.e., campos tensoriales covariantes antisimétricos de grado r. Con respecto al producto exterior, $\Omega(M) = \bigoplus_{r=0}^{n}\Omega^r(M)$ forma un álgebra sobre $\mathbb{R}$. Una *derivación* (resp. *antiderivación*) de $\Omega(M)$ es una aplicación lineal D de $\Omega(M)$ en sí mismo el cual satisface

$$\begin{aligned} D(\omega\wedge\omega') \;&=\; D\omega\wedge\omega' + \omega\wedge D\omega' \qquad \text{para } \omega,\omega'\in\Omega(M) \\ (\text{resp.} \;&=\; D\omega\wedge\omega' + (-1)^r\omega\wedge D\omega' \qquad \text{para } \omega\in\Omega^r(M), \omega'\in\Omega(M)) . \end{aligned}$$

Una derivación o una antiderivación D de $\Omega(M)$ se dice que es de grado k si este lleva $\Omega^r(M)$ hacia $\Omega^{r+k}(M)$ para cada r. La diferenciación exterior d es una antiderivación de gado 1. Como un resultado general sobre derivaciones y antiderivaciones de $\Omega(M)$, tenemos a la

Proposición 1.28.

(a) *Si D y D' son derivaciones de grado k y k' respectivamente, entonces $[D,D']$ es una derivación de grado $k+k'$;*

(b) *Si D es una derivación de grado k y D' una antiderivación de grado k', entonces $[D,D']$ es una antiderivación de grado $k+k'$;*

(c) *Si D y D' son antiderivaciones de grado k y k' respectivamente, entonces $DD'+D'D$ es una derivación de grado $k+k'$;*

(d) *Una derivación o una antiderivación está completamente determinada por sus efectos sobre $\Omega^0(M)=\mathfrak{F}(M)$ y $\Omega^1(M)=\mathfrak{X}(M)$.*

Proposición 1.29 *Para cada campo vectorial X, L_X es una derivación de grado 0 de $\Omega(M)$ el cual conmuta con la diferenciación exterior d. Recíprocamente, cada derivación de grado 0 de $\Omega(M)$ el cual conmuta con d es igual a L_X para algún campo vectorial X.*

Demostración: Observe primero que L_X conmuta con la alternación A definido atrás. Esto sigue inmediatamente de la siguiente fórmula:

$$(L_X\omega)(Y_1,\ldots,Y_r) \;=\; X(\omega(Y_1,\ldots,Y_r)) - \sum_i \omega(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_r)\ ,$$

cuya prueba ya vimos. Por tanto, $L_X(\Omega(M)) \subset \Omega(M)$ y, para cualesquier $\omega,\omega' \in \Omega(M)$, tenemos

$$\begin{aligned} L_X(\omega\wedge\omega') &= L_X(A(\omega\otimes\omega')) \\ &= A(L_X(\omega\otimes\omega')) \\ &= A(L_X\omega\otimes\omega') + A(\omega\otimes L_X\omega') \\ &= L_X\omega\wedge\omega' + \omega\wedge L_X\omega'\ . \end{aligned}$$

Para probar que L_X conmuta con d, primero observemos que, para cualquier difeomorfismo φ de M, $\tilde{\varphi}\omega = (\varphi^{-1})^*\omega$ y, por tanto, $\tilde{\varphi}$ conmuta con d. Sea φ_t un grupo local a $1-$parámetro de difeomorfismos locales generados por X. De $\tilde{\varphi}_t(d\omega) = d(\tilde{\varphi}\omega)$ y la definición de $L_X\omega$ estos implican que $L_X(d\omega) = d(L_X\omega)$ para cada $\omega \in \Omega(M)$. Recíprocamente, sea D una derivación de grado 0 de $\Omega(M)$ el cual conmuta con d. Puesto que D lleva $\mathfrak{F}(M)$ en sí mismo, D es una derivación de $\mathfrak{F}(M)$ y hay un campo vectorial X tal que $Df = Xf$ para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$. Sea $D' = D - L_X$. Entonces D' es una derivación de $\Omega(M)$ tal que $D'f = 0$ para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$. Para probar que $D' = 0$ es suficiente probar que $D'\omega = 0$ para cada $1-$forma ω. D' puede ser localizado y es suficiente mostrar que $D'\omega = 0$ cuando ω es de la forma fdg donde $f,g \in \mathfrak{F}(M)$ (porque ω es localmente de la forma $\sum f_i dx^i$ con respecto a un sistema de coordenadas local $x^1,\ldots,x^n$). Sea $\omega = fdg$. De $D'f = 0$ y $D'(dg) = d(D'g) = 0$, obtenemos

$$D'(\omega) \;=\; (D'f)dg + f\cdot D'(dg) \;=\; 0\ .$$

$\square$

Para cada campo vectorial X, definimos una antiderivación $\imath_X$, llamado el *producto interior* con respecto a X, de grado -1 de $\Omega(M)$ tal que

(a) $\imath_X f = 0$ para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$;

(b) $\imath_X\omega = \omega(X)$ para cada $\omega \in \Omega(M)$.

Esta antiderivación es única si este existe. Para probar su existencia, consideremos, para cada r, la contracción $C : \boldsymbol{T}^1_r(M) \to \boldsymbol{T}^0_{r-1}(M)$ asociado con el par $(1,1)$.

Considerar cada $r-$forma ω como un elemento de $\boldsymbol{T}_r^0(M)$ y defínese $\imath_X\omega = C(X \otimes \omega)$. En otras palabra,

$$(\imath_X\omega)(Y_1,\ldots,Y_{r-1}) \;=\; r\cdot\omega(X,Y_1,\ldots,Y_{r-1}) \qquad \text{para } Y_i \in \mathfrak{X}(M)\ .$$

Así definida, $\imath_X$, es una antiderivación de $\Omega(M)$; $\imath_X(\omega\wedge\omega') = \imath_X\omega\wedge\omega' + (-1)^r\omega\wedge\imath_X\omega'$, donde $\omega\in\Omega^r(M)$ y $\omega'\in\Omega^s(M)$, siguen simplemente de la siguiente fórmula:

$$(\omega\wedge\omega')(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{r+s}) \;=\; \frac{1}{(r+s)!}\sum\epsilon(j;k)\omega(Y_{j_1},\ldots,Y_{j_r})\omega'(Y_{k_1},\ldots,Y_{k_s})\ ,$$

donde la suma es tomada sobre todas las posibles particiones de $(1,\ldots,r+s)$ hacia $(j_1,\ldots,j_r)$ y $(k_1,\ldots,k_s)$ y $\epsilon(j;k)$ representa el signo de la permutación $(1\ldots,r+s)\mapsto(j_1,\ldots,j_r,k_1,\ldots,k_s)$.

Puesto que

$$(\imath_X^2\omega)(Y_1,\ldots,Y_{r-2}) \;=\; r(r-1)\cdot\omega(X,X,Y_1,\ldots,Y_{r-2}) \;=\; 0\ ,$$

tenemos que

$$\imath_X^2 \;=\; 0\ .$$

La siguiente proposición relaciona d, L_X e $\imath_X$.

Proposición 1.30.

(a) $L_X = d \circ \imath_X + \imath_X \circ d$ *para cada campo vectorial* X.

(b) $[L_X, \imath_Y] = \imath_{[X,Y]}$ *para cada campo vectorial* X *y* Y.

Demostración: Por (c) de la proposición 1.28, $d \circ \imath_X + \imath_X \circ d$ es una derivación de grado 0. Este conmuta con d porque $d^2 = 0$. Por la proposición 1.29, este es igual a la diferenciación de Lie con respecto a algún campo vectorial. Para probar que esto en realidad es igual a L_X, tenemos solamente que mostrar que $L_X f = (d \circ \imath_X + \imath_X \circ d)f$ para cada función f. Pero esta conclusión es cierta pues $L_X f = Xf$ y $(d \circ \imath_X + \imath_X \circ d)f = \imath_X(df) = df(X) = Xf$. Para probar la segunda aseveración (b), observese primero que $[L_X, \imath_Y]$ es una derivación antisimétrica de grado -1 y que ambos $[L_X, \imath_Y]$ e $\imath_{[X,Y]}$ son cero sobre $\mathfrak{F}(M)$. Por (d) de la proposición 1.28, es suficiente mostrar que ellos tienen el mismo efecto sobre cada $1-$forma ω. Como notamos en la prueba de la proposición 1.29, tenemos

$$(L_X\omega)(Y) \;=\; X(\omega(Y)) - \omega([X,Y])$$

el cual puede ser probado del mismo modo como en la proposición 1.26. Por tanto,

$$\begin{aligned}
[L_X, \imath_Y]\omega &= L_X(\omega(Y)) - \imath_Y(L_X\omega) \\
&= X(\omega(Y)) - (L_X\omega)(Y) \\
&= \omega([X,Y]) \\
&= \imath_{[X,Y]}\omega \ .
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 1.31 *Si* ω *es una* $r-$*forma, entonces*

$$\begin{aligned}
(d\omega)(X_0, X_1, \ldots, X_r) &= \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r)) \\
&+ \frac{1}{r+1}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r) \ ,
\end{aligned}$$

donde el símbolo $\hat{X}$ *significa que el término* X *es omitido. (Los casos* $r = 1$ *y* 2 *son particularmente útiles). Si* ω *es una* $1-$*forma, entonces*

$$(d\omega)(X,Y) = \frac{1}{2}\{\ X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])\ \}, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si ω *es una* $2-$*forma, entonces*

$$\begin{aligned}
(d\omega)(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\{\ X(\omega(X,Z)) + Y(\omega(Z,X)) + Z(\omega(X,Y)) \\
&- \ \omega([X,Y],Z) \ - \ \omega([Y,Z],X) \ - \ \omega([Z,X],Y)\ \} \ , \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \ .
\end{aligned}$$

Demostración: La prueba es por inducción sobre r. Si $r = 0$, entonces ω es una función y $d\omega(X_0) = X_0\omega$, lo que muestra que la fórmula de atrás es verdadera cuando $r = 0$. Asúmase que la fórmula es válida para $r - 1$. Sea ω una $r-$forma y, por simplicidad de notación, sea $X = X_0$. Por (a) de la proposición 1.30,

$$\begin{aligned}(r+1)d\omega(X, X_1, \ldots, X_r) &= (\imath_X \circ d\omega)(X_1, \ldots, X_r) \\ &= (L_X\omega)(X_1, \ldots, X_r) - (d \circ \imath_X\omega)(X_1, \ldots, X_r)\ .\end{aligned}$$

Como visto en la prueba de la proposición 1.29,

$$\begin{aligned}(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_r) &= X(\omega(X_1, \ldots, X_r)) \\ &- \sum_{i=1}^{r} \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_r)\ .\end{aligned}$$

Puesto que $\imath_X\omega$ es una $(r-1)-$forma, tenemos, por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}(d \circ \imath_X\omega)(X_1, \ldots, X_r) &= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}X_i(\imath_X\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r)) \\ &+ \frac{1}{r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}(\imath_X\omega)([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r) \\ &= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}X_i(\omega(X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r)) \\ &- \frac{1}{r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r)\ .\end{aligned}$$

Nuestra proposición sigue inmediatamente de estas tres fórmulas.

$\square$

Observación 1.4 Las fórmulas de esta proposición también son válidas para $r-$formas a valores vectoriales.

Proposición 1.32 *Sean A y B campos tensoriales del tipo $(1,1)$. Sea*

$$\begin{aligned}S(X,Y) &= [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X,Y] + BA[X,Y] \\ &\quad -A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y]\ , \\ &\qquad\qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)\ .\end{aligned}$$

Entonces la aplicación $S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es un campo tensorial del tipo $(1,2)$ y $S(X,Y) = -S(Y,X)$.

S es denominada la *torsión* de A y B.

1.3. Grupos de Lie

Ésta sección está basada en (Bleecker, D.; 1981) y (Greub, W.H. y Halperin, S.; 1972).

1.3.1. Grupos de Lie y álgebras de Lie

Definición 1.1 *Un* **grupo de Lie** *es un conjunto G el cual es un grupo y una variedad suave a la vez; y para el cual las siguientes aplicaciones son suaves:*

(i) La **aplicación multiplicación** *dada por*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & G\times G & \to & G \\ & (x,y) & \mapsto & xy \ . \end{array}$$

(ii) La **aplicación inversa** *dada por*

$$\begin{array}{rccc} \nu: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^{-1} \ . \end{array}$$

El elemento unidad del grupo de Lie es denotado por e.

Un **homomorfismo de grupos de Lie** $\varphi : G \to H$ *es un homomorfismo suave de grupos. Un* **isomorfismo de grupos de Lie** *es una aplicación que es un homomorfismo y un difeomorfismo a la vez.*

Sea G un grupo de Lie. Cada $a \in G$ determina aplicaciones suaves $\lambda_a, \rho_a : G \to G$, dados por

$$\lambda_a(x) \ = \ ax \qquad \text{y} \qquad \rho_a(x) \ = \ xa \ .$$

Ellos son llamados de *translaciones a izquierda y derecha* por a. Los axiomas de grupo producen las siguientes relaciones

$$\begin{array}{ccc} \lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab} \ , & & \rho_a \circ \rho_b = \rho_{ba} \ , \\ \lambda_e = \rho_e = \mathrm{id} & \text{y} & \lambda_a \circ \rho_b = \rho_b \circ \lambda_a \ . \end{array}$$

En particular, λ_a y ρ_b son difeomorfismos, con inversas $\lambda_{a^{-1}}$ y $\rho_{b^{-1}}$.

Consideraremos las siguientes notaciones para las dericadas de λ_a, ρ_b por

$$\mathsf{L}_a = (\lambda_a)_* = T\lambda_a : TG \to TG \qquad \text{y} \qquad \mathsf{R}_b = (\rho_b)_* = T\rho_b : TG \to TG \ .$$

Estas relaciones producen las siguientes

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{L}_a \circ \mathsf{L}_b \ = \ \mathsf{L}_{ab} \ , & & \mathsf{R}_a \circ \mathsf{R}_b \ = \ \mathsf{R}_{ba} \ , \\ \mathsf{R}_e \ = \ \mathsf{L}_e \ = \ \mathrm{id}_{TG} & \text{y} & \mathsf{L}_a \circ \mathsf{R}_b \ = \ \mathsf{R}_b \circ \mathsf{L}_a \ . \end{array}$$

Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces

$$\varphi \circ \lambda_a \ = \ \lambda_{\varphi(a)} \circ \varphi \qquad \text{y} \qquad \varphi \circ \rho_b \ = \ \rho_{\varphi(b)} \circ \varphi \ .$$

Por tanto
$$\varphi_* \circ \mathsf{L}_a \;=\; \mathsf{L}_{\varphi(a)} \circ \varphi_* \qquad \text{y} \qquad \varphi_* \circ \mathsf{R}_b \;=\; \mathsf{R}_{\varphi(b)} \circ \varphi_* \;.$$
En particular, cada $(\varphi_*)_x = T_x\varphi : T_xG \to T_{\varphi(x)}H$ $(x \in G)$ es inyectiva (respectivamente, sobreyectiva) si y sólo si $T_e\varphi = (\varphi_*)_e$ lo es.

Ahora considerando las aplicaciones multiplicación e inversa. Sus derivadas son aplicaciones de fibrado

$$\mu_* \;=\; T\mu \;:\; TG \times TG \longrightarrow TG \qquad \text{y} \qquad \nu_* \;=\; T\nu \;:\; TG \longrightarrow TG \;.$$

Lema 1.5 *Sea $\xi \in T_aG$, $\eta \in T_bG$. Entonces*

(1) $\mu_*(\xi, \eta) \;=\; \mathsf{R}_b\xi \;+\; \mathsf{L}_a\eta$

y

(2) $\nu_*(\xi) \;=\; -\,(\mathsf{L}_a^{-1} \circ \mathsf{R}_a)(\xi)$.

Demostración:

(1) Sea $j_a : G \to \{a\} \times G$ y $j_b : G \to G \times \{b\}$ denotan las inclusiones opuestas a y b respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu_*(\xi, \eta) &= (\mu_* \circ (j_b)_*)(\xi) + (\mu_* \circ (j_a)_*)(\eta) \\
&= (\mu \circ j_b)_*(\xi) + (\mu \circ j_a)(\eta) \\
&= (\rho_b)_*(\xi) + (\lambda_a)_*(\eta) \\
&= \mathsf{R}_b(\xi) + \mathsf{L}_a(\eta) \;.
\end{aligned}$$

(2) Puesto que $x \mapsto \mu(x, \nu(x))$ es la aplicación constante $G \to e$, tenemos

$$T\mu(\xi, T\nu(\xi)) \;=\; 0 \;.$$

Ahora (2) sigue de (1).

□

Las translaciones a izquierda y a derecha de un grupo de Lie G inducen automorfismos $(\lambda_a)_*$ y $(\rho_a)_*$ del álgebra de Lie real, $\mathfrak{X}(M)$, de campos vectoriales sobre G. Un campo vectorial X sobre G es llamado *invariante a izquierda* si $\mathsf{L}_a(X_x) = X_{ax}$, $a, x \in G$; i.e., $(\lambda_a)_*X = X$, $a \in G$.

Puesto que cada $(\lambda_a)_*$ preserva el bracket de Lie, los campos vectoriales invariantes a izquierda forman un subálgebra, $\mathfrak{X}_{\mathsf{L}}(G)$, de $\mathfrak{X}(M)$.

Proposición 1.33 *Un isomorfismo fuerte de fibrados $\alpha : G \times T_eG \xrightarrow{\cong} TG$ es dado por*

$$(a, h) \;\mapsto\; \mathsf{L}_a(h) \;.$$

Demostración: α restricto a las fibras es un isomorfismo. Más aun, es dado por

$$\alpha(a,h) \;=\; T\mu(0_a,h)$$

(por el lema 1.5) éste es suave.

□

Corolario 1.5 *Un isomorfismo* $\mathfrak{X}_{\mathsf{L}}(G) \stackrel{\cong}{\to} T_eG$ *es dado por*

$$X \;\mapsto\; X_e\ .$$

En particular $\dim \mathfrak{X}_{\mathsf{L}}(G) = \dim G$.

Corolario 1.6 *Un isomorfismo de* $\mathfrak{F}(G)-$*módulos*

$$\mathfrak{X}_{\mathsf{L}}(G) \otimes \mathfrak{F}(G) \stackrel{\cong}{\to} \mathfrak{X}(G)$$

es dado por $X \otimes f \mapsto f \cdot X$.

Definición 1.2 *Sea* $h \in T_eG$*. El único campo vectorial invariante a izquierda* X *tal que* $X_e = h$ *es denotado por* X_h*, y es llamado el* **campo vectorial invariante a izquierda generado por** h*.*

Similarmente, un campo vectorial Y es denominado *invariante a derecha* si $(\rho_b)_*Y = Y$, $b \in G$. El álgebra de Lie de campos vectoriales invariantes a derecha es denotado por $\mathfrak{X}_{\mathsf{R}}(G) \stackrel{\cong}{\to} T_eG$. La misma prueba como dada en la proposición 1.5 muestra que

$$Y \;\mapsto\; Y_e$$

define un isomorfismo $\mathfrak{X}_{\mathsf{R}}(G) \stackrel{\cong}{\to} T_eG$. El campo vectorial invariante a derecha que corresponde a $h \in T_eG$ bajo este isomorfismo es llamado el *campo vectorial invariante a derecha generado por* h, y es denotado por Y_h.

Proposición 1.34 *Si* $X \in \mathfrak{X}_{\mathsf{L}}(G)$ *y* $Y \in \mathfrak{X}_{\mathsf{R}}(G)$*, entonces*

$$[X,Y] \;=\; 0\ .$$

Demostración: Defínase $i_LY \in \mathfrak{X}(G \times G)$ y $i_RY \in \mathfrak{X}(G \times G)$ por $i_LY(x,y) = (Y(x),0)$ y $i_RX(x,y) = (0,X(y))$. Entonces

$$i_RX \underset{\mu}{\sim} X \qquad \text{y} \qquad i_LX \underset{\mu}{\sim} Y\ ,$$

Por lo que

$$0 \;=\; [i_RX, i_LY] \underset{\mu}{\sim} [X,Y]\ .$$

Puesto que μ es sobreyectiva, concluimos que $[X,Y] = 0$. □

Finalmente, considerando la aplicación inversa $\nu : x \mapsto x^{-1}$ de G. Como $\nu^2 = \mathrm{id}$, ν es un difeomorfismo. Claramente,

$$\nu \circ \lambda_a \;=\; \rho_{a^{-1}} \circ \nu \;, \qquad T\nu \circ \mathsf{L}_a \;=\; \mathsf{R}_{a^{-1}} \circ T\nu \;, \qquad \text{y} \qquad \nu_* \circ (\lambda_a)_* \;=\; (\rho_{a^{-1}})_* \circ \nu_* \;.$$

En particular, ν_* se restringe a un isomorfismo

$$\mathfrak{X}_{\mathsf{L}}(G) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_{\mathsf{R}}(G)$$

de álgebras de Lie. En vista del lema 1.5 (2), tenemos

$$\nu_* X_h \;=\; -\,Y_h \;, \qquad h \in T_eG,$$

y por tanto, para $h, k \in T_eG$,

$$[X_h, X_k](e) \;=\; -\,[Y_h, Y_k](e) \;.$$

El álgebra de Lie de un grupo de Lie.

El *álgebra de Lie* de un grupo de Lie G es el espacio vectorial T_eG, junto con la estructura de álgebra de Lie inducida de $\mathfrak{X}_{\mathsf{L}}(G)$ mediante el corolario de la proposición 1.33. Así, para $h, k \in T_eG$,

$$[h, k] \;=\; [X_h, X_k](e) \;.$$

Ahora consideremos un homomorfismo de grupos de Lie, $\varphi : G \to H$. Como $\varphi(e) = e$ (e denota la unidad en ambos grupos), la derivada $T\varphi$ se restringe a una aplicación lineal

$$T_e\varphi : T_eG \to T_eH \;.$$

Esta aplicación será denotada por φ'.

Proposición 1.35 *φ' es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración: Esto sigue del hecho de que

$$X_h \underset{\varphi}{\sim} X_{\varphi' h} \;, \qquad h \in T_eG \;.$$

Por tanto $[X_h, X_k] \underset{\varphi}{\sim} [X_{\varphi' h}, X_{\varphi' k}]$. Evaluando esta relación en e obtenemos

$$\varphi'[h, k] \;=\; [\varphi' h, \varphi' k] \;.$$

□

Si $\psi : H \to K$ es un segundo homomorfismo de grupos de Lie, entonces

$$(\psi \circ \varphi)' \;=\; \psi' \circ \varphi' \;.$$

Ejemplo 1.7.

(1) **El grupo vectorial:** Si V es un espacio vectorial real o complejo finito dimensional, la adición vectorial hace de V un grupo de Lie.

(2) **El grupo $GL(V)$:** Considérese al grupo $GL(V)$ de automorfismos lineales de un espacio vectorial V $n-$dimensional (real o complejo). Este es un subconjunto abierto del espacio vectorial $L(V)$, y por tanto una variedad; más aun, la multiplicación e inversa son suaves y así $GL(V)$ es un grupo de Lie.
Puesto que $GL(V)$ es un subconjunto abierto de $L(V)$, su fibrado tangente es la restricción del fibrado tangente de $L(V)$,

$$T\,GL(V) \;=\; GL(V) \times L(V)\ .$$

En particular, el espacio vectorial subyacente del correspondiente álgebra de Lie es $L(V)$.
Continuando, observemos que las translaciones a izquierda λ_τ, con $\tau \in GL(V)$, son dadas por

$$\lambda_\tau(\sigma) \;=\; \tau\circ\sigma\ , \qquad \tau, \sigma \in GL(V)\ .$$

Esto implica que

$$L_\tau(\sigma, \alpha) \;=\; (\tau\circ\sigma, \tau\circ\alpha)\ , \qquad \sigma \in GL(V),\ \alpha \in L(V)\ .$$

Por tanto el campo vectorial invariante a izquierda generado por $\alpha \in L(V)$ es dado por

$$X_\alpha(\tau) \;=\; (\tau, \tau\circ\alpha)\ , \qquad \tau \in GL(V)\ .$$

Para determinar los brackets de Lie, sea f una funcional lineal en $L(V)$ y denotando también su restricción a $GL(V)$ por f. entonces

$$(X_\alpha f)(\tau) \;=\; f(\tau\circ\alpha)\ ,$$

y por lo que

$$([X_\alpha, X_\beta]f)(\tau) \;=\; f(\tau\circ(\alpha\circ\beta - \beta\circ\alpha))\ .$$

Como $\tau \in GL(V)$ y $f \in L(V)^*$ fueron arbitrarios, obtenemos

$$[X_\alpha, X_\beta] \;=\; X_{\alpha\circ\beta - \beta\circ\alpha}\ .$$

En particular, la estructura de Lie de $L(V)$ inducida de la estructura del grupo de Lie de $GL(V)$ es dada por

$$[\alpha, \beta] \;=\; \alpha\circ\beta \;-\; \beta\circ\alpha\ .$$

(3) **El grupo de los inversibles de una álgebra asociativa:** Sea A una álgebra asociativa finito dimensional sobre $\mathbb{R}$, con elemento unidad. Para $a \in A$, defina $\mu(a) : A \to A$ como la multiplicación a izquierda por a. Entonces a tiene una inversa en A si y sólo si $\mu(a)$ es un isomorfismo lineal; i.e., si y sólo si

$$\det \mu(a) \neq 0\ .$$

Los elementos inversibles de A forman un grupo $G(A)$ bajo la composición; la condición atrás muestra que $G(A)$ es abierto en A. Por tanto $G(A)$ es un grupo de Lie. El mismo argumento como dado para $GL(V)$ en $L(V)$ muestra que el álgebra de Lie de $G(A)$ es A, con bracket de Lie dado por

$$[\alpha, \beta] \ = \ \alpha\beta - \beta\alpha, \qquad \alpha, \beta \in A \ .$$

(4) **Productos directos:** Sea G, H grupos de Lie. La variedad producto $G \times H$ puede ser grupo de Lie haciendo

$$(x, y) \cdot (x', y') \ = \ (x \cdot x', y \cdot y'), \qquad x, x' \in G \ y, y' \in H \ .$$

Este grupo de Lie es llamado el *producto directo* de G y H.
Las proyecciones $\pi_G : G \times H \to G$ y $\pi_H : G \times H \to H$, y las inclusiones $G, H \to G \times H$, opuesto de e, son todos homomorfismos de grupos de Lie. Los homomorfismos de álgebras de Lie π'_G, ϕ'_H son dados por

$$\pi'_G(h, k) \ = \ h \qquad \text{y} \qquad \pi'_H(h, k) \ = \ k \ .$$

Esto implica que el bracket de Lie en $T_e(G \times H)$ es dado por

$$[(h, k), (h', k')] \ = \ ([h, h'], [k, k']), \qquad h, h' \in T_eG, \ k, k' \in T_eH \ .$$

(5) **Fibrado tangente:** Si G es un grupo de Lie, entonces la aplicación

$$T\mu : TG \times TG \to TG$$

hace de TG un grupo de Lie, con aplicación inversa $T\nu$. (La ley asociativa es obtenida diferenciando la relación $\mu \circ (\mu \times \text{ id }) = \mu \circ (\text{ id } \times \mu)$.) La sección cero $o : G \to TG$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

(6) **La $\ell-$componente:** Sea G un grupo de Lie, y sea G^0 denotando la componente conexa de la variedad G el cual contiene e; este es una subvariedad abierta. Puesto que μ, ν son continuas y $G^0 \times G^0$, G^0 siendo conexas estos implican que

$$\mu(G^0 \times G^0) \subset G^0 \qquad \text{y} \qquad \nu(G^0) \subset G^0 \ .$$

De modo similar, $aG^0a^{-1} \subset G^0$, $a \in G$. Así G^0 es un subgrupo normal de G. Este es claramente un grupo de Lie y es llamado la *$\ell-$componente de G*. El grupo cociente G/G^0 es denominado *grupo componente de G*.

(7) Los números reales no nulos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ y los números complejos no nulos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ son cada uno grupos de Lie bajo la multiplicación. Si V (respectivamente, W) es un espacio vectorial real (respectivamente, complejo), entonces las aplicaciones

$$\det : GL(V) \to \mathbb{R}^* \qquad \text{y} \qquad \det : GL(W) \to \mathbb{C}^* \ ,$$

i.e., $\det' = \text{ tr }$.

1.3.2. La aplicación exponencial

Subgrupos a $1-$parámetro

Un *subgrupo a $1-$parámetro* de un grupo de Lie G es un homomorfismo, α, del grupo aditivo de números reales hacia G,

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G .$$

En otras palabras, un subgrupo a $1-$parámetro es una aplicación suave $\alpha : \mathbb{R} \to G$ tal que

$$\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t) , \quad s, t \in \mathbb{R} .$$

En particular, $\alpha(0) = e$ y $\alpha(-t) = \alpha(t)^{-1}$.

Supongamos que $\alpha : \mathbb{R} \to G$ sea un grupo a $1-$parámetro. Entonces α determina un camino $\dot{\alpha} : \mathbb{R} \to TG$

$$\dot{\alpha}(t) = T_t\alpha \cdot \frac{d}{dt} \in T_{\alpha(t)}G .$$

En particular, $\dot{\alpha}(0) \in T_eG$.

Proposición 1.36 *Sea $\alpha : \mathbb{R} \to G$ una aplicación suave tal que $\alpha(0) = e$ y sea $\dot{\alpha}(0) = h$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) α es un subgrupo a $1-$parámetro.

(2) α es una órbita de X_h.

(3) α es una órbita de Y_h.

Demostración:
(1)$\Rightarrow$(2): Denote el campo vectorial $t \mapsto d/dt$ sobre $\mathbb{R}$ por T; este es un campo vectorial invariante a izquierda y derecha por $T(0)$. Por tanto si α es un subgrupo a $1-$parámetro,

$$T \underset{\alpha}{\sim} X_h ;$$

i.e., α es una órbita de X_h.
(2)$\Rightarrow$(1): Asumiendo que α es una órbita de X_h y fijando $s \in \mathbb{R}$. Entonces

$$t \mapsto \alpha(s+t) \quad \text{y} \quad t \mapsto \alpha(s)\alpha(t)$$

son ambas órbitas de X_h (usando la invariancia a izquierda de X_h), y coinciden en $t = 0$. Por tanto

$$\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t) .$$

(3)$\Leftrightarrow$(1): Misma prueba como en (2)$\Leftrightarrow$(1). □

Proposición 1.37 *A cada vector $h \in T_eG$ corresponde un único subgrupo a $1-$parámetro, α, tal que*

$$\dot{\alpha}(0) = h .$$

Demostración: La unicidad es inmediata de la proposición 1.36. Ahora probemos la existencia. De acuerdo al teorema de existencia y unicidad de solucion de una EDO, tenemos que para algún $\epsilon > 0$ existe una órbita

$$\alpha_0 : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G \ ,$$

para X_h, satisfaciendo $\alpha_0(0) = e$.

Ahora fijemos $t_0 \in (0, \epsilon)$. Defínase la aplicación suave

$$\alpha_p : (p\,t_0 - \epsilon, p\,t_0 + \epsilon) \to G \ , \qquad p \in \mathbb{Z} \ ,$$

por

$$\alpha_p(t) \ = \ \alpha_0(t_0)^p \ \alpha_0(t - p\,t_0) \ .$$

Como X_h es invariante a izquierda, estas aplicaciones son todas órbitas para X_h. Más aun,

$$\alpha_{p-1}(p\,t_0) \ = \ \alpha_0(t_0)^p \ = \ \alpha_p(p\,t_0) \ .$$

Por tanto α_{p-1} y α_p coinciden en la intersección de su dominio.

Esto conduce a una aplicación suave $\alpha : \mathbb{R} \to G$ dada por

$$\alpha(t) \ = \ \alpha_p(t) \ , \quad t \in (p\,t_0 - \epsilon, p\,t_0 + \epsilon) \ ;$$

α es una órbita para X_h satisfaciendo $\alpha(0) = e$; así por la proposición 1.36 este es un subgrupo a $1-$parámetro. $\square$

El subgrupo a $1-$parámetro, α, que satisface $\dot{\alpha}(0) = h$ es llamado el *subgrupo a $1-$parámetro generado por h*, y es denotado por α_h. En particular, el subgrupo a $1-$parámetro generado por 0 es la aplicación constante $t \mapsto e$.

Ejemplo 1.8 Sea $\mathbb{C}^*$ el grupo multiplicativo de números complejos no nulos: $\mathbb{C}^* = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \ \}$ Entonces su correspondiente álgebra de Lie es $\mathbb{C}$, considerado como un espacio vectorial real.

El subgrupo a $1-$parámetro generado por un vector $h \in \mathbb{C}$ es dado por

$$\alpha_h(t) \ = \ \exp(th) \ .$$

La aplicación exponencial

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ $(= T_eG)$. Define una aplicación

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \to G$$

por

$$\psi(t, h) \ = \ \alpha_h(t) \ , \quad t \in \mathbb{R}, \ h \in \mathfrak{g} \ .$$

Lema 1.6 *ψ es una aplicación suave. Este satisface*

$$\psi(st,h) \;=\; \psi(t,sh)\;, \qquad s,t\in\mathbb{R},\;\; h\in\mathfrak{g}\;.$$

Demostración: La ecuación se toma porque ambos lados definen al subgrupo a $1-$parámetro generado por sh.

Para mostrar que ψ es suave, defínase un campo vectorial Z sobre la variedad $\mathfrak{g}\times G$ por

$$Z(h,a) \;=\; (0, X_h(a))\;.$$

En vista de existencia y solución de una EDO definida por un campo vectorial, existen vecindades I de $0\in\mathbb{R}$, V de 0 en $\mathfrak{g}$ y U de e en G, y existencia de una aplicación suave

$$\varphi : I\times(V\times U)\to\mathfrak{g}\times G$$

tal que

$$\dot{\varphi}(t,h,a) \;=\; Z(\varphi(t,h,a))\;, \qquad t\in I,\;\; h\in V,\;\; a\in U,$$

y

$$\varphi(0,h,a) \;=\; (h,a)\;.$$

Ahora escribamos

$$\varphi(t,h,e) \;=\; (\varphi_{\mathfrak{g}}(t,h),\varphi_G(t,h)), \qquad t\in I,\;\; h\in V.$$

Entonces $\dot{\varphi}_{\mathfrak{g}}(t,h)=0,\;\varphi_{\mathfrak{g}}(0,h)=h$, y así

$$\varphi_{\mathfrak{g}}(t,h) \;=\; h, \qquad t\in I,\;\; h\in V.$$

Esto implica que

$$\dot{\varphi}_G(t,h) \;=\; X_{\varphi_{\mathfrak{g}}(t,h)}(\varphi_G(t,h)) \;=\; X_h(\varphi_G(t,h))\;.$$

Por tanto $\varphi_G(t,h)=\alpha_h(t)=\psi(t,h)$ y así ϕ es suave en $I\times V$.

Ahora la ecuación funcional

$$\psi(t+\tau,h) \;=\; \psi(t,h)\psi(\tau,h), \qquad t,\tau\in\mathbb{R},\;\; h\in\mathfrak{g}$$

implica que ψ es suave en $\mathbb{R}\times V$. Finalmente, aplicando la ecuación $\psi(st,h)=\psi(t,sh)$, vemos que ψ es suave en $\mathbb{R}\times\mathfrak{g}$.

□

Definición 1.3 *La* **aplicación exponencial** *para G es la aplicación suave* $\exp:\mathfrak{g}\to G$ *dada por*

$$\exp h \;=\; \psi(1,h) \;=\; \alpha_h(1)\;.$$

Esto implica que el subgrupo a $1-$parámetro generado por $h \in \mathfrak{g}$ puede ser escrito como

$$\alpha_h(t) \; = \; \exp(th), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particular $\exp(ph) = (\exp h)^p, \; p \in \mathbb{Z}, \; h \in \mathfrak{g}$.

Proposición 1.38 *La aplicación exponencial satisface*

$$\exp 0 \; = \; e \qquad y \qquad T_0 \exp \; = \; (d\exp)_0 \; = \; id \; .$$

Demostración: Fijando $h \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$h \; = \; \dot{\alpha}_h(0) \; = \; \frac{d}{dt}(\exp th)\Big|_{t=0} \; = \; T_0 \exp(h) \; .$$

$\square$

Corolario 1.7 *Existen vecindades V de 0 en $\mathfrak{g}$ y U de e en G en donde la aplicación exponencial se restringe como un difeomorfismo*

$$\exp : V \xrightarrow{\cong} U \; .$$

Corolario 1.8 *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ una descomposición de E como suma directa de subespacios. Defínase $\varphi : \mathfrak{g} \to G$ por*

$$\varphi(h_1 \oplus \cdots \oplus h_r) \; = \; \exp h_1 \cdot \; \ldots \; \cdot \exp h_r \; , \qquad h_i \in \mathfrak{g}_i \; .$$

Entonces $T_0\varphi = \mathrm{id}$, y por lo que φ lleva una vecindad de 0 difeomórficamente sobre una vecindad de e.

Demostración: Claramente $T_0\varphi$ se restringe a la identidad en cada $\mathfrak{g}_i$; por tanto este se restringe a la identidad en $\mathfrak{g}$. $\square$

Corolario 1.9 *Si G es conexo, entonces* $\exp(\mathfrak{g})$ *genera G.*

Demostración: $\exp(\mathfrak{g})$ contiene una vecindad de e. Así el corolario sigue del siguiente Lema. $\square$

Lema 1.7 *Si G es conexa, y $U \subset G$ es una vecindad de e, entonces U genera G.*

Demostración: U genera un subgrupo abierto H de G. Así cada clase Ha $(a \in G)$ es abierto y

$$G \; = \; H \cup \bigcup_{a \neq H} Ha$$

particiona G en dos conjuntos abiertos disjuntos. Puesto que G es conexo, $G = H$.

$\square$

Ejemplo 1.9.

(1) Considérese el caso $G = GL(V)$, $\mathfrak{g} = L(V)$. Entonces exp es la exponencial de matrices conocida.

(2) Sea H un segundo grupo de Lie con su respectivo álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Entonces la aplicación exponencial para $G \times H$ es dada por

$$\exp(h, k) \;=\; (\exp_G(h), \exp_H(k)), \qquad h \in \mathfrak{g},\; k \in \mathfrak{h}$$

Homomorfismos.

Proposición 1.39 *Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces el homomorfismo inducido, φ', de álgebras de Lie satisface*

$$\varphi \circ \exp_G \;=\; \exp_H \circ \varphi' \; .$$

Demostración: Fijando $h \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\alpha : t \mapsto \varphi(\exp_G(th)) \qquad \text{y} \qquad \beta : t \mapsto \exp_H(t\varphi'(h))$$

son subgrupos a 1−parámetro de H. Más aun,

$$\dot{\alpha}(0) \;=\; \varphi'(h) \;=\; \dot{\beta}(0) \; ,$$

y por tanto $\alpha = \beta$. En particular

$$\varphi(\exp_G(h)) \;=\; \exp_H(\varphi'(h)), \qquad h \in \mathfrak{g}.$$

□

Corolario 1.10 *Asúmase $\psi : G \to H$ como un segundo homomorfismo de grupos de Lie y que $\varphi' = \psi'$. Si G es conexo, entonces $\varphi = \psi$*

Demostración: La proposición 1.39 implica que φ y ψ coinciden en $\exp_G(\mathfrak{g})$. Este genera G. Puesto que φ y ψ son homomorfismos de grupos, esto implica que $\varphi = \psi$.

□

Corolario 1.11 *El homomorfismo φ es inyectivo si y sólo si*

$$T\varphi : TG \to TH$$

es inyectivo. En este caso φ es un embebimiento de G sobre H.

Demostración: Si $T\varphi$ es inyectivo, entonces ciertamente φ es inyectivo. Recíprocamente, asumiendo φ inyectivo. Sea V una vecindad de 0 en $\mathfrak{g}$ tal que la restricción de $\exp_G$ a V es inyectivo. Entonces puesto que $\exp_H \circ \varphi' = \varphi \circ \exp_G$, la restricción de $\exp_H \circ \varphi'$ a V es inyectiva. En particular, la restricción de φ' a V es inyectivo.

Como φ' es lineal y V es un subconjunto abierto de $\mathfrak{g}$, esto implica que φ' es inyectivo. Puesto que

$$T_a\varphi \;=\; L_{\varphi(a)} \circ \varphi' \circ L_{a^{-1}} \;, \qquad a \in G \;,$$

cada $T_a\varphi$ es inyectivo. Por tanto así lo es $T\varphi$. □

Corolario 1.12 *Si φ es biyectivo, entonces es un difeomorfismo y por tanto un isomorfismo entre grupos de Lie.*

Demostración: Puesto que φ es inyectivo, entonces también lo es $T\varphi : TG \to TH$. Como φ es biyectivo, implica que φ es un difeomorfismo. □

1.3.3. Representaciones.

En esta sección prefijaremos un grupo de Lie G con su correspondiente álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

La derivada de una representación.

Una *representación* de G en un espacio vectorial W finito dimensional (real o complejo) es un homomorfismo de grupos de Lie

$$R : G \longrightarrow GL(W) \;.$$

Puesto que el álgebra de Lie de $GL(W)$ es el espacio $L(W)$ de aplicaciones lineales de W, la derivada del homomorfismo R es un homomorfismo de álgebras de Lie,

$$R' : \mathfrak{g} \longrightarrow L(W)$$

R' es llamado la *derivada de la representación R.*

Un homomorfismo de álgebras de Lie $\theta : \mathfrak{g} \to L(W)$ es llamada la *representación de $\mathfrak{g}$ en W*. Así R' es una representación de $\mathfrak{g}$ en W.

Una representación, R, de G (respectivamente, θ de $\mathfrak{g}$) es denominada *fiel* si $\ker R = e$ (respectivamente, si $\ker\theta = 0$).

Si R es una representación de G en W, entonces el *subespacio invariante de R* es el subespacio $W_{R=I}$ (o simplemente W_I) dado por

$$W_I \;=\; \{\; w \in W \;|\; R(g)w = w,\; g \in G \;\} \;.$$

De modo similar, si θ es una representación de $\mathfrak{g}$ en W, entonces el *subespacio invariante para* θ es el subespacio $W_{\theta=0}$ (o W_0) dado por

$$W_0 \;=\; \{\; w \in W \mid \theta(h)w = 0,\; h \in \mathfrak{g} \;\}\ .$$

Un subespacio $V \subset W$ es llamado *estable para* R (respectivamente, *estable para* θ) si cada uno de los operadores $R(g),\ g \in G$ (respectivamente $\theta(h),\ h \in \mathfrak{g}$) lleva V en sí mismo.

Ahora fijando $h \in \mathfrak{g}$. Entonces $R(\exp th)$, y $R'(h)$ son aplicaciones lineales de W. En particular, consideremos el grupo a $1-$parámetro

$$R_h : t \longmapsto R(\exp th)$$

como un camino en el espacio vectorial $L(V)$. Por lo tanto la diferenciación produce un camino $\dot{R}_h$ en $L(W)$.

Por otro lado recordemos que $T\ GL(W) = GL(W) \times L(W)$. Más aun,

$$X_{R'(h)}(\tau) \;=\; (\tau, \tau \circ R'(h)), \qquad \tau \in GL(W),\ h \in \mathfrak{g}.$$

Aplicando esta fórmula con $\tau = R_h(t)$ se consigue el siguiente

Lema 1.8

$$\dot{R}_h(t) \;=\; R_h(t) \circ R'(h).$$

Proposición 1.40.

(1) El subespacio invariante W_I y W_0 para R y R' están relacionados por

$$W_I \;\subset\; W_0\ .$$

Si G es conexo, entonces $W_I = W_0$.

(2) Si $V \subset W$ es estable para R, entonces este es estable para R'. Si V es estable para R' y G es conexo, entonces V es estable para R.

Demostración:

(1) Supóngase $h \in \mathfrak{g}$ y $w \in W_I$. Entonces $R_h(t)w = w$, y así

$$\dot{R}_h(t)w \;=\; \frac{d}{dt}(R_h(t)w) \;=\; 0\ .$$

Ahora el lema 1.8 produce $R'(h)w = 0$. Por lo que $W_I \subset W_0$.
Recíprocamente, sea $h \in \mathfrak{g}$ y asuma que $w \in W_0$. Entonces el lema 1.8 implica que $P_h(t)w = w$, $t \in \mathbb{R}$. Esto implica que

$$P(\exp h)w \;=\; w, \qquad h \in \mathfrak{g}.$$

Ahora considerando que G sea conexo, obtenemos que $R(g)w = w$, para cada $g \in G$.

(2) La prueba sigue el mismo camino que el item (1). $\square$

Ejemplo 1.10 Establezcamos que R (respectivamente, θ) denotará una representación de G (respectivamente, $\mathfrak{g}$) en W.

(1) **Representación contragrediente:** La representación, $R^\sharp$, de G en W^* *contragrediente a* R está definida por

$$R^\sharp(g) \;=\; (R(g)^{-1})^*, \qquad g \in G.$$

La representación $\theta^\sharp$ de $\mathfrak{g}$ en W^* *contragrediente a* θ está definida por

$$\theta^\sharp(h) \;=\; -\,\theta(h)^*, \qquad h \in \mathfrak{g}.$$

Evidentemente

$$(R^\sharp)' \;=\; (R')^\sharp\;.$$

(2) **Representaciones multilineales:** Representaciones $\otimes R$, $\wedge R$ y $\vee R$ de G en $\otimes W$, $\wedge W$, $\vee W$ son dados por

$$(\otimes R)(g) \;=\; \otimes R(g), \quad (\wedge R)(g) \;=\; \wedge R(g) \quad \text{y} \quad (\vee R)(g) \;=\; \vee R(g), \quad g \in G.$$

Las representaciones $\theta_\otimes, \theta_\wedge, \theta_\vee$ de $\mathfrak{g}$ en $\otimes W$, $\wedge W$ y $\vee W$ son dadas por

$$\begin{aligned}
\theta_\otimes(h)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) &= \sum_{i=1}^{p} w_1 \otimes \cdots \otimes \theta(h)w_i \otimes \cdots \otimes w_p,\\
\theta_\wedge(h)(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p) &= \sum_{i=1}^{p} w_1 \wedge \cdots \wedge \theta(h)w_i \wedge \cdots \wedge w_p,\\
\theta_\vee(h)(w_1 \vee \cdots \vee w_p) &= \sum_{i=1}^{p} w_1 \vee \cdots \vee \theta(h)w_i \vee \cdots \vee w_p, \qquad p \geqslant 1,
\end{aligned}$$

y

$$\theta_\otimes(h)\lambda \;=\; 0, \quad \theta_\wedge(h)\lambda \;=\; 0, \quad \theta_\vee(h)\lambda \;=\; 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente,

$$(\otimes R)' \;=\; (R')_\otimes, \quad (\wedge R)' \;=\; (R')_\wedge \quad \text{y} \quad (\vee R)' \;=\; (R')_\vee.$$

(3) Recordemos que $L^p(W)$ denota el espacio de funcionales $p-$lineales en W. Defínese una representación, R^p, de G en $L^p(W)$ dada por

$$\begin{gathered}(R^p(g)\Phi)(w_1, \ldots, w_p) \;=\; \Phi(R(g^{-1})w_1, \ldots, R(g^{-1})w_p),\\ w_i \in W, \quad g \in G, \quad \Phi \in L^p(W).\end{gathered}$$

Entonces la derivada de R^p es dada por

$$[(R^p)'(h)](\Phi)(w_1, \ldots, w_p) \;=\; -\sum_{i=1}^{p} \Phi(w_1, \ldots, R'(h)w_i, \ldots, w_p), \qquad h \in \mathfrak{g}.$$

La representación adjunta.

Cada $g \in G$ determina el *automorfismo interior*, τ_g, de G dado por

$$\tau_g(a) \; = \; gag^{-1}, \qquad g \in G.$$

Por tanto la derivada, τ'_g, de τ_g es un automorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Este es denotado por Ad g. Puesto que $\tau_g = \lambda_g \circ \rho_g^{-1}$,

$$\mathrm{Ad}\; g \; = \; L_g \circ R_g^{-1}, \qquad g \in G \; .$$

Proposición 1.41 *La correspondencia* $\mathrm{Ad} : g \mapsto \mathrm{Ad}\; g$ *define una representación de* G *en* $\mathfrak{g}$.

Demostración: Evidentemente $\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}$, y así

$$\mathrm{Ad}\; g \; \circ \; \mathrm{Ad}\; g' \; = \; \mathrm{Ad}\; gg' \; .$$

Así Ad es un homomorfismo de grupos. Queda por demostrar que Ad es suave.

Definamos una aplicación suave $T : G \times G \to G$ haciendo

$$T(g,a) \; = \; \tau_g(a), \qquad g, a \in G.$$

Su derivada, dT, es suave. Pero

$$(dT)_{(g,e)}(0,h) \; = \; \mathrm{Ad}\; g\; (h) \; .$$

Por tanto, para cada $h \in \mathfrak{g}$, la aplicación $g \mapsto \mathrm{Ad}\; g\; (h)$ son suaves. Esto implica que Ad es suave. $\square$

La representación Ad es llamada la *representación adjunta de G.*

Por otro lado, una representación, ad, de álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial $\mathfrak{g}$ es dado por

$$\mathrm{ad}(h)(k) \; = \; [h,k], \qquad h, k \in \mathfrak{g}.$$

Esta es denominada la *representación adjunta de* $\mathfrak{g}$.

Proposición 1.42 $\mathtt{ad}$ *es la derivada de* $\mathtt{Ad}$.

Lema 1.9 *Fijando* $a \in G, \; h \in \mathfrak{g}$. *Entonces*

$$X_h(a) \; = \; Y_{\mathtt{Ad}(a)\,h}(a) \; .$$

Demostración: Recordemos que Ad $(a) = R_a^{-1} \circ L_a$. Por tanto

$$Y_{\mathtt{Ad}(a)h}(a) \; = \; (R_a \circ \mathtt{Ad}(a))(h) \; = \; L_a(h) \; = \; X_h(a) \; .$$

$\square$

Demostración de la proposición 1.42. Fijando $h \in \mathfrak{g}$ y sea $e_1, \ldots, e_n$ una base para $\mathfrak{g}$. Entonces funciones f^i sobre $\mathfrak{g}$ están definidas por

$$\mathrm{Ad}(g)\,h \;=\; \sum_{i=1}^{n} f^i(g)\,e_i, \qquad g \in G.$$

Ellos satisfacen

$$\mathrm{Ad}'(k)h \;=\; \sum_{i=1}^{n}(X_k(f^i))(e)e_i, \qquad k \in \mathfrak{g}.$$

Por otro lado, aplicando el lema 1.9 obtenemos

$$X_h \;=\; \sum_{i=1}^{n} f^i Y_{e_i}\ .$$

Como $[X_k, Y_{e_i}] = 0$, esto implica que

$$[X_k, X_h] \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_k(f^i) Y_{e_i}\ .$$

Evaluando esto en e obtenemos $[k, h] = \mathrm{Ad}'(k)h$. □

Corolario 1.13 $\boldsymbol{Ad}(\exp h) = \exp(\boldsymbol{ad}\,h),\ h \in \mathfrak{g}$.

En resumen, cada automorfismo φ de un grupo de Lie G induce un automorfismo $\varphi_* = T_e\varphi$ de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$; en efecto, si $A \in \mathfrak{g}$, $\varphi_* A$ es también un campo vectorial invariante a izquierda y $\varphi_*[A, B] = [\varphi_* A, \varphi_* B]$ para $A, B \in \mathfrak{g}$. Para cada $g \in G$ y $A \in \mathfrak{g}$, tenemos $\mathrm{Ad}(g)A = (R_{g^{-1}})A$, porque $gxg^{-1} = L_g R_{g^{-1}} x = R_{g^{-1}} L_g x$ y A es invariante a izquierda. Sea $A, B \in \mathfrak{g}$ y φ_t el grupo a $1-$parámetro de difeomorfismos de G generado por A. Sea $a_t = \exp(tA) = \varphi_t(e)$. Entonces $\varphi_t(x) = xa_t$ para $x \in G$. Por la proposición 1.21, tenemos

$$\begin{aligned}
[A, B] \;&=\; \operatorname*{lím}_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_t)_* B - B] \\
&=\; \operatorname*{lím}_{t\to 0} \frac{1}{t}[(R_{a_t})_* B - B] \\
&=\; \operatorname*{lím}_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathrm{Ad}(a_t^{-1})B - B].
\end{aligned}$$

Esto implica que si H es un subgrupo de Lie invariante de G, su álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, $A \in \mathfrak{g}$ y $B \in \mathfrak{h}$ implican que $[A, B] \in \mathfrak{h}$. Recíprocamente, el subgrupo de Lie conexo H generado por un ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es un subgrupo invariante de G.

Una forma diferencial ω sobre G es denominada invariante a izquierda si $(L_a)^*\omega = \omega$ para cada $a \in G$. El espacio vectorial $\mathfrak{g}^*$ formado por todas las $1-$formas invariantes a izquierda es el espacio dual del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$: si $A \in \mathfrak{g}$ y $\omega \in \mathfrak{g}^*$, entonces la función

$\omega(A)$ es constante sobre G. Si ω es una forma invariante a izquierda, entonces así lo es $d\omega$, porque la derivada exterior conmuta con φ^*. Por tanto obtenemos la *ecuación de Maurer-Cartan:*

$$d\omega(A, B) \;=\; -\frac{1}{2}\omega([A, B]) \qquad \text{para } \omega \in \mathfrak{g}^* \quad \text{y} \quad A, B \in \mathfrak{g} \;.$$

La $1-$*forma canónica* θ sobre G es la $1-$forma invariante a izquierda a valores en $\mathfrak{g}$ únicamente determinada por

$$\theta(A) \;=\; A \qquad \text{para } A \in \mathfrak{g} \;.$$

Sea $E_1, \ldots, E_r$ una base para $\mathfrak{g}$ y haciendo

$$\theta \;=\; \sum_{i=1}^{r} \theta^i E_i \;.$$

Entonces $\theta^1, \ldots, \theta^r$ forman una base para el espacio de $1-$formas reales invariantes a izquierda sobre G. Haciendo

$$[E_j, E_k] \;=\; \sum_{i=1}^{r} c^i_{jk} E_i \;,$$

donde los c^i_{jk} son llamados las *constantes de estructura* de $\mathfrak{g}$ con respecto a la base $E_1, \ldots, E_r$. Esto puede ser sencillamente verificado que la ecuación de Maurer-Cartan es dada por

$$d\theta^i \;=\; -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Ahora consideremos el grupo de Lie de difeomorfismos. Decimos que un grupo de Lie G es un *grupo de Lie de difeomorfismos* sobre una variedad M o que G actua diferenciablemente sobre M si las siguientes condiciones son satisfechas:

(1) Cada elemento a de G induce un difeomorfismo de M, denotado por $x \mapsto xa$ donde $x \in M$;

(2) $G \times M \ni (a, x) \;\mapsto\; xa \in M$ es una aplicación diferenciable;

(3) $x(ab) = (xa)b$ para todo $a, b \in G$ y $x \in M$.

También escribimos $R_a x$ en vez de xa y decimos que G actua sobre M por la derecha. Si escribimos ax y asumimos que $(ab)x = a(bx)$ en lugar de (3), decimos que G actua sobre M a izquierda y usamos la notación $L_a x$ por ax también. Nótese que $R_{ab} = R_b \circ R_a$ y $L_{ab} = L_a \circ L_b$. De (3) y del hecho de que cada R_a o L_a es uno-a-uno sobre M, esto implica que R_e y L_e son los difeomorfismos identidad de M.

Decimos que G actua *efectivamente* (resp. *libremente*) sobre M si $R_a x = x$ para todo $x \in M$ (resp. para algún $x \in M$) implica que $a = e$.

Si G actua sobre M por la derecha, asignamos a cada elemento $A \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial A^* sobre M como sigue. La acción del subgrupo a $1-$parámetro $a_t = \exp tA$ sobre M induce un campo vectorial sobre M, el cual será denotado por A^*.

Proposición 1.43 *Sea un grupo de Lie G actuando sobre M por la derecha. La aplicación $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ el cual envía A hacia A^* es un homomorfismo de álgebras de Lie. Si G actua efectivamente sobre M, entonces σ es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{X}(M)$. Si G actua libremente sobre M, entonces, para cada $A \in \mathfrak{g}$ no cero, $\sigma(A)$ nunca se anula sobre M.*

Demostración: Primero observemos que σ puede ser definido también en el siguiente modo. Para cada $x \in M$, sea σ_x la aplicación $a \in G \to xa \in M$. Entonces $(\sigma_x)_* A_e = (\sigma A)_x$. Esto implica que σ es una aplicación lineal de $\mathfrak{g}$ hacia $\mathfrak{X}(M)$. Para probar que σ conmuta con el bracket, sea $A, B \in \mathfrak{g}$, $A^* = \sigma A$, $B^* = \sigma B$ y $a_t = \exp tA$. Así tenemos

$$[A^*, B^*] \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[B^* - R_{a_t} B^*].$$

Del hecho de que $R_{a_t} \circ \sigma_{x a_t^{-1}}(c) = x a_t^{-1} c a_t$ para $c \in G$, obtenemos (denotando la diferencial de una aplicación por la misma letra)

$$(R_{a_t} B^*)_x \;=\; R_{a_t} \circ \sigma_{x a_t^{-1}} B_e \;=\; \sigma_x(\mathrm{Ad}(a_t^{-1}) B_e)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
[A^*, B^*] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\sigma_x B_e - \sigma_x(\mathrm{Ad}(a_t^{-1}) B_e)] \\
&= \sigma_x \left(\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[B_e - \mathrm{Ad}(a_t^{-1}) B_e] \right) \\
&= \sigma_x([A, B]_e) \\
&= (\sigma[A, B])_x \;,
\end{aligned}$$

En virtud de la fórmula para $[A, B]$ en $\mathfrak{g}$ en términos de $\mathrm{Ad}\, G$. Así tenemos probado que σ es un homomorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ hacia el álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$. Supóngase que $\sigma A = 0$ en todas partes sobre M. Esto significa que el grupo a $1-$parámetro de difeomorfismos R_{a_t} es trivial, que es, R_{a_t} es el difeomorfismo identidad de M para cada t. Si G es efectiva sobre M, esto implica que $a_t = e$ para cada t y por tanto $A = 0$. Para probar que la anterior aseveración de nuestra proposición, asuma que σA se anula en algún punto x de M. Entonces R_{a_t} deja x fijado para cada t. Si G actua libremente sobre M, esto implica que $a_t = e$ para cada t y por tanto $A = 0$.

□

Capítulo 2

Fibrados con grupo estructural

Éste capítulo sigue principalmente las ideas de (Greub, W.H. y Halperin, S.; 1973), (Saunders, D.J.; 1989) y (Steenrod, N.; 1951).

2.1. Fibrados suaves

2.1.1. La propiedad del producto local

Sea $\pi : E \to M$ una aplicación suave entre variedades. La aplicación π es dicha que tiene la *propiedad de producto local* con respecto a una variedad modelo F si existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M y una familia $\{\psi_\alpha\}$ de difeomorfismos

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha) \ ,$$

tal que

$$\pi \circ \psi_\alpha(x, p) \ = \ x \ , \qquad x \in U_\alpha, \quad p \in F \ .$$

El sistema $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ será llamado la *descomposición local de* π.

Claramente cualquier aplicación con la propiedad de producto local es sobreyectiva y abierta.

Definición 2.1 *Un* **fibrado suave** *es una cuádrupla* (E, π, M, F) *donde* $\pi : E \to M$ *es una aplicación suave el cual tiene la propiedad de producto local con respecto a* F*. Una descomposición local para* π *es llamada la* **representación en coordenadas** *del fibrado.*
Llamaremos a E *como el* **espacio total** *o* **espacio fibrado***,* M **el espacio base***, y* F *la* **fibra típica o fibra modelo***. Para cada* $x \in M$*, el conjunto* $F_x = \pi^{-1}(x)$ *será llamada la* **fibra** *sobre* x*. Cada fibra es un subconjunto cerrado de* E*, y* E *es la unión disjunta de las fibras.*
Una **sección** *suave de un fibrado* (E, π, M, F) *es una aplicación suave* $\sigma : M \to E$ *tal que* $\pi \circ \sigma = \boldsymbol{Id}_B$*.*

Si $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ *es una representación en coordenadas del fibrado, obtenemos biyecciones* $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x,\ x \in U_\alpha$, *definidas por*

$$\psi_{\alpha,x}(q) \;=\; \psi_\alpha(x,p), \qquad p \in F.$$

En particular, si $x \in U_{\alpha\beta}$, obtenemos aplicaciones $\psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x} : F \to F$. Estos son difeomorfismos. En efecto, puesto que ψ_α y ψ_β definen difeomorfismos de $U_\alpha \times F$ sobre $\pi_{\alpha\beta}^{-1}$, ellos determinan un difeomorfismo $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ de $U_{\alpha\beta} \times F$ sobre sí misma. Mas

$$\psi_{\beta\alpha}(x,q) \;=\; (x, \psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x}(q)), \qquad x \in U_{\alpha\beta},\ q \in F,$$

y por tanto $\psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x}$ es un difeomorfismo de F.

Ahora supóngase que (E', π', M', F') es un segundo fibrado suave. Entonces una aplicación suave $\varphi : E \to E'$ es aquella que *preserva fibra* si, siempre que $\pi \circ z_1 = \pi \circ z_2$, $(z_1, z_2 \in E)$, entonces $\pi' \circ \varphi(z_1) = \pi' \circ \varphi(z_2)$. Cualquier aplicación φ que preserva fibra induce una aplicación $\hat{\varphi} : M \to M'$ haciendo el requerimiento de que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ M & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & M' \end{array}$$

Ahora mostremos que $\check{\varphi}$ es siempre suave. En efecto, si $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ es una descomposición local para π y $q \in F$ es fijado, entonces

$$\check{\varphi}(x) \;=\; (\pi' \circ \varphi \circ \psi_\alpha)(x,q), \qquad x \in U_\alpha\ .$$

Por tanto $\check{\varphi}$ es suave sobre cada miembro U_α del cubrimiento de M.

Sea (E'', π'', M'', F'') un tercer fibrado y asuma que $\varphi : E \to E'$, $\varphi : E' \to E''$ preservan fibra. Entonces $\varphi' \circ \varphi : E \to E''$ preserva fibra y $(\varphi' \circ \varphi)\check{} = \check{\varphi}' \circ \check{\varphi}$.

Proposición 2.1 *Sea M, F variedades y sea E un conjunto. Asuma que la aplicación sobreyectiva entre conjuntos $\pi : E \to M$ es dada con las siguientes propiedades:*

(1) Existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M y una familia $\{\psi_\alpha\}$ de biyecciones

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)\ .$$

(2) Para cada $x \in U_\alpha,\ q \in F,\ \pi \circ \psi_\alpha(x,q) = x$.

(3) La aplicación $\psi_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \times F \to U_{\alpha\beta} \times F$ definido por $\psi_{\beta\alpha}(x,q) = (\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha)(x,q)$ son difeomorfismos.

Entonces existe exactamente una estructura de variedad sobre E para el cual (E, π, M, F) es un fibrado suave con representación en coordenadas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$.

Demostración: Podemos asumir que $\{\alpha\}$ es numerable y haciendo $W_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, $\varphi_\alpha = \psi_\alpha^{-1}$, y $M_\alpha = U_\alpha \times F$ obtenemos una única estructura de variedad suave sobre E tal que los ψ_α son difeomorfismos.

Entonces la hipótesis (2) nos dice que la restricción de π a $\pi^{-1}(U_\alpha)$ es $\pi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}$, donde $\pi_\alpha : U_\alpha \times F \to U_\alpha$ denotan las proyecciones sobre su primer factor. Puesto que π_α es suave, π es suave sobre $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Por tanto π es suave sobre E y entonces, por definición, $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ es una descomposición local para π. Por tanto (E, π, M, F) es un fibrado con representación en coordenadas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$. $\square$

Proposición 2.2 *Cada fibrado suave tiene una representación en coordenadas finita.*

Demostración: Sea $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ cualquier representación en coordenadas para (E, π, M, F). Escogiendo un refinamiento $\{V_{ij} \mid i = 1, \ldots, p;\ j \in \mathbb{N}\}$ de $\{U_\alpha\}$ tal que $V_{ij} \cap V_{ik} = \emptyset$ para $j \neq k$. Sea $V_i = \bigcup_j V_{ij}$ y defínase $\psi_i : V_i \times F \to \pi^{-1}(V_i)$ por

$$\psi_i(x, q) \ = \ \psi_{ij}(x, q) \qquad \text{si } x \in V_{ij},\ q \in F\ ,$$

donde ψ_{ij} es la restricción de algún ψ_α. $\square$

2.2. Fibrados principales

Definición 2.2 *Sea G un grupo de Lie. Un* **fibrado principal (suave) con grupo estructural** *G es un par $(\mathcal{P}, T)$, donde*

(i) $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ es un fibrado suave.

(ii) $T : P \times G \to P$ es una acción a derecha de G sobre P.

(iii) $\mathcal{P}$ admite una representación en coordenadas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ tal que

$$\psi_\alpha(x, gg') \ = \ \psi_\alpha(x, g) \cdot g'\ , \qquad x \in U_\alpha,\ g, g' \in G\ .$$

(Nótese que escribimos $T(z, g) = z \cdot g$).

La acción T es denominada la *acción principal* y una representación en coordenadas satisfaciendo la condición (iii) es llamada una *representación principal en coordenadas.*

La condición (iii) implica que

$$\pi(z \cdot g) \ = \ \pi(z) \cdot g, \qquad z \in P,\ g \in G.$$

Más incluso, esto implica que la acción T es libre y que la órbita de G através del punto $z \in P$ es la fibra conteniendo z. En particular, las órbitas son subvariedades de P. Estos serán denotados por $G_x = \pi^{-1}(x)$ $(x \in M)$, (puesto que la acción es libre no existe confusión con la notación para el grupo de isotropía). Nótese que $G_x \mapsto x$ define una biyección de conjuntos entre las órbitas y M.

Sea $\hat{\mathcal{P}} = (\hat{P}, \hat{\pi}, \hat{M}, \hat{G})$ un segundo fibrado principal con acción principal $\hat{T}$. Una aplicación suave equivariante $\varphi : P \to \hat{P}$ es llamada *homomorfismo de fibrados principales*. Tal homomorfismo es aquella que preserva órbitas, y por tanto preserva fibras. Así este induce una aplicación suave $\check{\varphi} : P \to \hat{P}$ tal que $\hat{\pi} \circ \varphi = \check{\varphi} \circ \pi$.

Más aun, φ se restringe a las aplicaciones suaves $\varphi_x : G_x \to G_{\check{\varphi}(x)}$ $(x \in M)$. Las relaciones

$$\varphi_x(z \cdot a) \;=\; \varphi_x(z) \cdot a, \qquad z \in G_x,\; a \in G,$$

implican que cada φ_x es un difeomorfismo. Esto conduce a que φ es un difeomorfismo si y sólo si $\check{\varphi}$ lo es. En este caso φ^{-1} es también un homomorfismo de fibrados principales y φ y φ^{-1} son llamados *isomorfismos de fibrados principales*. Si $M = M'$ y $\check{\varphi} = \mathrm{Id}$, entonces φ es llamado un *isomorfismo estricto o fuerte entre fibrados principales*.

Ejemplo 2.1.

(1) **El fibrado producto:** El fibrado trivial,

$$(M \times G, \pi, M, G),$$

junto con la acción a derecha

$$(x, a) \cdot b \;=\; (x, ab), \qquad x \in M,\; a, b \in G$$

es un fibrado principal. Este es llamado *fibrado trivial*.

(2) **Espacios homogéneos:** Sea K un subgrupo cerrado de G. Entonces el fibrado $(G, \pi, G/K, K)$, junto con la acción de K sobre G por la multiplicación a derecha, es un fibrado principal con grupo estructural K.

(3) **Fibrado referencial:** Sea $\xi = (E, \rho, M, \mathbb{E})$ un fibrado vectorial, y, para $x \in M$, sea G_x denotando el conjunto de isomorfismos lineales de $\mathbb{E}$ hacia E_x. Deberemos construir un fibrado principal, $(P, \pi, M, GL(\mathbb{E}))$, donde $P = \bigcup_x G_x$ y π es la proyección que lleva G_x hacia x.
En efecto, sea $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ una representación en coordenadas para ξ. Los isomorfismos $\psi_{\alpha,x} : \mathbb{E} \xrightarrow{\equiv} E_x$ determina un conjunto de biyecciones

$$\varphi_{\alpha,x} : GL(\mathbb{E}) \to G_x, \qquad x \in U_x,$$

por

$$\varphi_{\alpha,x} \;=\; \psi_{\alpha,x} \circ \varphi, \qquad \varphi \in GL(\mathbb{E}).$$

Así el conjunto de biyecciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \times GL(\mathbb{E}) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ son dados por

$$\varphi_\alpha(x, \varphi) \;=\; \psi_{\alpha,x} \circ \varphi, \qquad x \in U_\alpha,\; \varphi \in GL(\mathbb{E}).$$

Evidentemente

$$(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)(x, \varphi) \;=\; (x, \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x} \circ \varphi), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta,\; \varphi \in GL(\mathbb{E}).$$

Esto implica que $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ es un difeomorfismo de $(U_\alpha \cap U_\beta) \times GL(\mathbb{E})$. Por tanto por la proposición 2.1 existe una única estructura suave sobre el conjunto P tal que $(P, \pi, M, GL(\mathbb{E}))$ se torna un fibrado suave.
Finalmente, defínase una acción a derecha de $GL(\mathbb{E})$ sobre cada conjunto G_x haciendo

$$\varphi_x \cdot \varphi \;=\; \varphi \circ \varphi, \qquad \varphi_x \in G_x,\ \varphi \in GL(\mathbb{E}).$$

Estas acciones definen una acción a derecha de $GL(\mathbb{E})$ sobre el conjunto P. Incluso más,

$$\varphi_\alpha(x, \varphi) \cdot \varphi_1 \;=\; \varphi_\alpha(x, \varphi \circ \varphi_1), \qquad x \in U_\alpha,\ \varphi, \varphi_1 \in GL(\mathbb{E}).$$

Esto implica que la acción de $GL(\mathbb{E})$ sobre P es suave y que $\mathcal{P} = (P, \pi, M, GL(\mathbb{E}))$ es un *fibrado principal.*
Fijando una base $e_1, \ldots, e_r$ de $\mathbb{E}$. Entonces una biyección de G_x al conjunto de bases (*o referenciales*) de E_x es dado por

$$\varphi \;\mapsto\; (\varphi e_1, \ldots, \varphi e_r)\ .$$

Por esta razón $\mathcal{P}$ es llamado el *fibrado referencial* asociado a ξ.

2.2.1. Propiedades elementales

Sea $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ un fibrado principal que admite una sección σ sobre un conjunto abierto $U \subset M$. σ determina el homomorfismo $\varphi : U \times G \to P$ de fibrados principales, dados por

$$\varphi(x, a) \;=\; \sigma(x) \cdot a, \qquad x \in U,\ a \in G.$$

φ puede ser considerado como un isomorfismo fuerte del fibrado trivial a la restricción de $\mathcal{P}$ a U. En particular, si $\mathcal{P}$ admite una sección global, este es un fibrado trivial.

Si τ es una segunda sección sobre un conjunto abierto V, entonces existe una única aplicación suave

$$\mathsf{g}_{UV} : U \cap V \to G$$

tal que $\varphi(x, \mathsf{g}_{UV}(x)) = \tau(x)$. Tenemos

$$\tau(x) \;=\; \sigma(x) \cdot \mathsf{g}_{UV}(x), \qquad x \in U \cap V,$$

y esta ecuación determina g_{UV}.

Lema 2.1 *Sea $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ un fibrado suave. Sea T una acción suave a derecha libre de G a P, cuyas órbitas coinciden con las fibras del fibrado. Entonces $\mathcal{P}$ es un fibrado principal con acción principal T.*

Demostración: Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de M tal que cada U_α admite una sección $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$. Defínase $\psi_\alpha : U_\alpha \times G \overset{\equiv}{\to} \pi^{-1}(U_\alpha)$ haciendo

$$\psi_\alpha(x, a) \;=\; \sigma_\alpha(x) \cdot a\ .$$

Entonces $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ es una representación en coordenadas satisfaciendo la condición (iii). $\square$

Continuando, sea $\mathcal{P} = (\hat{P}, \hat{\pi}, \hat{M}, \hat{G})$ un fibrado principal, y sea $\psi : M \to \hat{M}$ una aplicación suave. Construiremos un fibrado principal (P, π, M, G) junto con un homomorfismo, $\varphi : P \to \hat{P}$, de fibrados principales el cual induce ψ.

En efecto, sea P la unión disjunta,

$$P \;=\; \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times G_{\psi(x)}),$$

y define a π por $\pi(\{x\} \times G_{\psi(x)}) = x$. Define una acción a derecha, T, de G sobre el conjunto P y una aplicación equivariante de conjuntos $\varphi : P \to \hat{P}$ por

$$T((x,z),a) \;=\; (x, z \cdot a) \qquad \text{y} \qquad \varphi(x,z) = z, \quad z \in G_{\psi(x)},\ x \in M,\ a \in G.$$

Damos a P una estructura suave, como sigue. Escójase un cubrimiento abierto $\{V_\nu\}$ de $\hat{M}$ tal que cada V_ν admite una sección $\sigma_\nu : V_\nu \to \hat{P}$. Sea $U_\nu = \psi^{-1}(V_\nu)$ y defina biyecciones $\chi_\nu : U_\nu \times G \to \pi^{-1}(U_\nu)$ por

$$\chi_\nu(x,a) \;=\; (x, \sigma_\nu(\psi(x)) \cdot a)\ .$$

Entonces para $x \in U_\nu \cap U_\mu$,

$$(\chi_\mu^{-1} \circ \chi_\nu)(x,a) \;=\; (x, \mathsf{g}_{\mu\nu}(\psi(x))a)\ ,$$

donde $\mathsf{g}_{\mu\nu} : V_\nu \cap V_\mu \to G$ es la aplicación suave satisfaciendo

$$\sigma_\nu(y) \;=\; \sigma_\mu(y) \cdot \mathsf{g}_{\mu\nu}(y), \qquad y \in V_\mu \cap V_\nu\ .$$

Así, aplicando la proposición 2.1 obtenemos una única estructura suave sobre P tal que $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ es un fibrado suave con representación en coordenadas $\{(U_\nu, \chi_\nu)\}$. Como las aplicaciones χ_ν son equivariante, T es una acción suave y $(\mathcal{P}, T)$ es un fibrado principal. Más aun, φ es un homomorfismo de fibrados principales.

2.3. Fibrados asociados

En esta sección $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ denotará un fibrado principal con acción principal T. Además

$$S : G \times F \to F$$

denotará una acción, fija, a izquierda de G sobre una variedad F.

2.3.1. Fibrados asociados

Considere la acción a derecha, Q, de G sobre la variedad producto $P \times F$ dado por

$$Q_a(z,y) = (z,y)\cdot a = (z\cdot a\,,\,a^{-1}\cdot y), \qquad z\in P,\ y\in F,\ a\in G.$$

Q será llamada *acción conjunta de* G. El conjunto de órbitas para la acción conjunta será denotado por $P\times_G F$ y

$$q : P\times F \to P\times_G F$$

denotará la proyección correspondiente; i.e., $q(z,y)$ es la órbita através de (z,y).

La aplicación q determina una aplicación $\rho : P\times_G F \to M$ via el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P\times F & \xrightarrow{\quad q\quad} & P\times_G F \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_P} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\ P & \xrightarrow{\quad \pi\quad} & M\ , \end{array} \tag{2.1}$$

donde $\pi_P : P\times F \to P$ es la proyección obvia. Denótese a $\rho^{-1}(x)$ por F_x, $x\in M$.

Proposición 2.3 *Existe una única estructura suave sobre $P\times_G F$ tal que*

(1) $\xi = (P\times_G F, \rho, M, F)$ es un fibrado suave.

(2) $q : P\times F \to P\times_G F$ es una aplicación suave que preserva fibra, que se restringe a difeomorfismos

$$q_z : z\times F \xrightarrow{\cong} F_{\pi(z)}, \qquad z\in P,$$

sobre cada fibra.

(3) $(P\times F, q, P\times_G F, G)$ es un fibrado principal suave con acción principal Q.

(4) π_P es un homomorfismo de fibrados principales.

Definición 2.3 *ξ es denominado el* **fibrado con fibra F y grupo estructural G asociado a** *$\mathcal{P}$; q es llamada la aplicación principal.*

Demostración de la proposición.

Prueba de (1): Construiremos una estructura suave sobre $P\times_G F$ para el cual ξ es un fibrado suave. Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de M y considérese la sección $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$. Estos están relacionados por

$$\sigma_\beta(x) \;=\; \sigma_\alpha(x)\cdot \mathsf{g}_{\alpha\beta}(x), \qquad x\in U_\alpha\cap U_\beta,$$

donde $\mathsf{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta \to G$ son aplicaciones suaves. Defínanse las aplicaciones,

$$\varphi_\alpha : U_\alpha\times F \to \rho^{-1}(U_\alpha),$$

haciendo

$$\varphi_\alpha(x,y) \;=\; q(\sigma_\alpha(x),y), \qquad x \in U_\alpha,\; y \in F.$$

Entonces $\rho(\varphi_\alpha(x,y)) = x$ y así φ_α se restringe al conjunto de aplicaciones

$$\varphi_{\alpha,x} : F \to \rho^{-1}(x), \qquad x \in U_\alpha.$$

Más aun, para cada órbita en $\rho^{-1}(x)$ se corresponde a un único $y \in F$ tal que la órbita pasa através de $\sigma_\alpha(x), y)$. Por tanto $\varphi_{\alpha,x}$ es biyección, y así φ_α es biyectivo.

Además, las relaciones $q(z \cdot a, y) = q(z, a \cdot y)$ implican que

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta(x,y) \;=\; (x, \mathrm{g}_{\alpha\beta}(x) \cdot y), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad y \in F.$$

Así, esto establece una estructura suave sobre $P \times_G F$ en el cual ξ se torna un fibrado suave con representación en coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$.

Prueba de (3): Para mostrar que $(P \times F, q, P \times_G F, G)$, es un fibrado principal con acción principal Q, considérese el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times G \times F \arrow[r, "\psi_\alpha \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times S"] & \pi^{-1}(U_\alpha) \times F \arrow[d, "q"] \\ U_\alpha \times F \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & \rho^{-1}(U_\alpha)\ , \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

donde $\psi_\alpha(x,a) = \sigma_\alpha(x) \cdot a$. Sea $V_\alpha = \rho^{-1}(U_\alpha)$; entonces

$$q^{-1}(V_\alpha) \;=\; (\pi \circ \pi_P)^{-1}(U_\alpha) \;=\; \pi^{-1}(U_\alpha) \times F.$$

Por lo tanto, los difeomorfismos $\chi_\alpha : V_\alpha \times G \xrightarrow{\cong} q^{-1}(V_\alpha)$ son dados por

$$\chi_\alpha(\varphi_\alpha(x,y),a) \;=\; (\psi_\alpha(x,a), a^{-1} \cdot y).$$

Ellos satisfacen las relaciones

$$(q \circ \chi_\alpha)(w,a) = w, \qquad \chi_\alpha(w,ab) = Q(\chi_\alpha(w,a),b), \qquad w \in V_\alpha,\; a,b \in G;$$

(3) sigue.

Prueba de (2): El diagrama conmutativo (2.1) muestra que q preserva fibra, mientras que el diagrama conmutativo (2.2) implica que la aplicación

$$q_z : F \xrightarrow{\cong} F_{\pi(z)}$$

son difeomorfismos.

Prueba de (4): Sigue trivialmente de los anteriores. $\square$

2.3.2. Aplicaciones equivariantes

Asúmase que $\mathcal{P} = (\hat{P}, \hat{\pi}, \hat{M}, G)$ sea un segundo fibrado principal y que $\hat{S}$ sea una acción a izquierda de G sobre una variedad $\hat{F}$. Supóngase que

$$\varphi : P \to \hat{P} \qquad \text{y} \qquad \alpha : F \to \hat{F}$$

sean aplicaciones equivariantes.

Entonces la aplicación $\varphi \times \alpha : P \times F \to \hat{P} \times \hat{F}$ es equivariante con respecto a la acción conjunta de G; i.e., este es un homomorfismo de fibrados principales. Por lo que induce una aplicación suave,

$$\varphi \times_G \alpha : P \times_G F \to \hat{P} \times_G \hat{F} \ ,$$

el cual hace al diagrama,

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{\varphi\times\alpha} & \hat{P} \times \hat{F} \\ \Big\downarrow q & & \Big\downarrow \hat{q} \\ P \times_G F & \xrightarrow{\varphi\times_G\alpha} & \hat{P} \times_G \hat{F} \end{array} \quad ,$$

conmutar.

Sea $\psi : M \to \hat{M}$ una aplicación suave inducida por φ. Entonces el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} P \times_G F & \xrightarrow{\varphi\times_G\alpha} & \hat{P} \times_G \hat{F} \\ \Big\downarrow \rho & & \Big\downarrow \hat{\rho} \\ M & \xrightarrow{\psi} & \hat{M}, \end{array}$$

conmuta, i.e., $\varphi \times_G \alpha$ es una aplicación que preservan fibra entre los fibrados asociados. El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & \hat{F} \\ \Big\downarrow q_z & & \Big\downarrow \hat{q}_{\varphi(z)} \\ F_x & \xrightarrow{(\varphi\times_G\alpha)_x} & \hat{F}_{\psi(x)} \end{array} \qquad x = \pi(z), \qquad z \in P,$$

muestra que, si α es un difeomorfismo, entonces así lo es cada $(\varphi \times_G \alpha)_x$.

El caso cuando $\mathcal{P} = \hat{\mathcal{P}}$ y $\varphi =$ Id, es de particular importancia; en este caso obtenemos una aplicación que preserva fibra,

$$(\mathrm{Id} \times_G \alpha) : P \times_G F \to P \times_G \hat{F},$$

el cual induce la aplicación identidad en M.

Ejemplo 2.2.

1. $F = \{\text{point}\}$. Entonces $P \times_G F = M$ y el fibrado principal $(P \times F, q, P \times_G F, G)$ coincide con $\mathcal{P}$.

2. Asuma la acción de G sobre F como trivial. Entonces $\xi = (M \times F, \rho, M, F)$ es trivial. También, si el fibrado principal $\mathcal{P}$ es trivial, entonces así lo es ξ.

3. Supóngase que $y \in F$ sea fijado bajo la acción de G: $a \cdot y = y,\ a \in G$.
   Entonces la inclusión $j : \{y\} \to F$ es equivariante. Este induce un diagrama conmutativo suave
   $$\begin{tikzcd} P \times_G \{y\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\cong"] & P \times_G F \arrow[d, "\rho"] \\ M \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & M; \end{tikzcd}$$
   así σ es una sección en ξ.

4. $\lambda-$**extensión:** Sea $\lambda : G \to K$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces G actua a izquierda sobre K por
   $$a \cdot y \ = \ \lambda(a)y, \qquad a \in G,\ y \in K.$$
   Así obtenemos un fibrado $\mathcal{P}_\lambda = (P \times_G K, \rho, M, K)$.
   Por otro lado, la aplicación multiplicación de K determina una acción a derecha
   $$(P \times K) \times K \to P \times K.$$
   Esta aplicación tiene en cuenta los factores sobre q para producir una acción libre a derecha
   $$T_\lambda : (P \times_G K) \times K \to P \times_G K.$$
   Las órbitas de T_λ son precisamente las fibras de $P \times_G K$. Así esto implica que $(\mathcal{P}_\lambda, T_\lambda)$ es un $K-$fibrado principal. Este es llamado de $\lambda-$*extensión de* $\mathcal{P}$.
   Continuando, defínase una aplicación suave $\varphi_\lambda : P \to P \times_G K$ considerando $\varphi_\lambda(z) = q(z, e)$. El diagrama,
   $$\begin{tikzcd} P \times G \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\lambda"] \arrow[d, "T"] & P \times K \arrow[d, "q"] \\ P \arrow[r, "\varphi_\lambda"] \arrow[dr, "\pi"'] & P \times_G K \arrow[d, "\rho"] \\ & M \end{tikzcd}$$
   conmuta. Esto muestra que φ_λ es una aplicación que preserva fibra de P hacia $P \times_G K$, induciendo la identidad en M.
   En particular, considérese el caso cuando $G = K$ y $\lambda =$Id; así G actua sobre sí mismo por la multiplicación a izquierda. En este caso φ_λ es un isomorfismo fuerte de fibrados principales, y el diagrama muestra que $(P \times G, q, P \times_G G, G)$ es el fibrado principal trivial.

5. **Reducción del grupo estructural:** También, sea $\lambda : G \to K$ un homomorfismo de grupos de Lie. Asúmase que $\hat{\mathcal{P}} = (\hat{P}, \hat{\pi}, M, K)$ es un fibrado principal. Una *reducción del grupo estructural de* $\hat{\mathcal{P}}$ *de* K *hacia* G *via* λ es un fibrado principal $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ y una aplicación suave que preserva fibra $\varphi : P \to \hat{P}$, induciendo la identidad en la base, y satisfaciendo

$$\varphi(z \cdot a) \ = \ \varphi(z) \cdot \lambda(a), \qquad a \in G.$$

Tal reducción induce un isomorfismo obvio de fibrados principales de la $\lambda-$extensión de $\mathcal{P}$ a $\hat{\mathcal{P}}$. Recíprocamente, si $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ es cualquier fibrado principal con $\lambda-$extensión $\mathcal{P}_\lambda = (P \times_G K, \rho, M, K)$, entonces el homomorfismo φ_λ es una reducción del grupo estructural de $\mathcal{P}_\lambda$ de K hacia G.

2.3.3. Fibrado vectorial asociado

Asuma ahora que $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial finito dimensional (real o complejo) y S una representación de G en $\mathbb{F}$. En este caso $F = P \times_G \mathbb{F}$ es un *fibrado vectorial.*

En efecto, para cada $x \in M$, $z \in \pi^{-1}(x)$, los difeomorfismos $q_z : \mathbb{F} \xrightarrow{\cong} F_x$ son conectados por

$$q_{z \cdot a} \ = \ q_z \circ S(a), \qquad a \in G.$$

Puesto que la aplicación $S(a)$ es un isomorfismo lineal, existe una única estructura lineal en F_x para el cual las aplicaciones q_z se tornan isomorfismos lineales. El vector cero de F_x es dado por $0_x = q(z, 0)$, $z \in \pi^{-1}(x)$.

Cada $\varphi_{\alpha,x}$ de la representación en coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ para ξ es un isomorfismo lineal. Por tanto ξ es un fibrado vectorial con representación en coordenadas de fibrado vectorial $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Puesto que q se restringe a isomorfismos en las fibras, el fibrado trivial $(P \times F, \pi_P, P, F)$ es el pull-back de ξ a P via π.

A la representación trivial S corresponde el fibrado vectorial trivial.

Siguiendo, considere una representación de G en un segundo espacio vectorial H y sea $\alpha : F \to H$ sea una aplicación lineal equivariante. Entonces la aplicación inducida,

$$\mathrm{Id} \times_G \alpha : P \times_G F \to P \times_G H,$$

es lineal en cada fibra, y así esta es una aplicación (fuerte) de fibrados.

Denote a los fibrados vectoriales que corresponden a $\mathbb{F}$ y $\mathbb{E}$ por F y E y considere las representaciones inducidas de G en los espacios

$$\mathbb{F} \oplus \mathbb{E}, \qquad \mathbb{F} \otimes \mathbb{E}, \qquad L(\mathbb{F}; \mathbb{E}), \qquad \mathbb{F}^*, \qquad \wedge \mathbb{F}.$$

Las varias aplicaciones canónicas entre estos espacios vectoriales, tal como

$$\begin{array}{lccc} \text{evaluación:} & L(\mathbb{F}; \mathbb{E}) \otimes \mathbb{F} & \to & \mathbb{E}, \\ \text{composición:} & L(\mathbb{F}) \otimes L(\mathbb{F}) & \to & L(\mathbb{F}), \\ \text{proyección:} & \mathbb{F} \oplus \mathbb{E} & \to & \mathbb{F}, \\ \text{trazo:} & L(\mathbb{F}) & \to & \mathbb{R}, \end{array}$$

conmutan con la representación de G. Así, ellos inducen aplicaciones entre los correspondientes fibrados vectoriales. Para los cuatro ejemplos atrás tenemos

$$\begin{array}{lccc}
\text{evaluación:} & L(F;E)\otimes F & \to & E, \\
\text{composición:} & L(F)\otimes L(F) & \to & L(F), \\
\text{proyección:} & F\oplus E & \to & F, \\
\text{trazo:} & L(F) & \to & \mathfrak{F}(M).
\end{array}$$

Capítulo 3

Teoría de conexiones

Éste capítulo recoge las ideas de (Bleecker, D.; 1981), (Greub, W.H. y Halperin, S.; 1973), (Kobayashi, S. y Nomizu, K.; 1963), (Kolár, I., Michor P.W. y Slovák, J.; 1993), (Learth Soares, B.; 2007) y (Mangiarotti, L. y Sardanashvily, G.; 2000).

3.1. Conexiones en un fibrado principal

Sea $\mathcal{P} = (P, \pi, M, G)$ un fibrado principal sobre una variedad M con grupo estructural G. Para cada $u \in P$, sea V_u un subespacio de T_uP que consiste de vectores tangentes a la fibra através de u. Una **conexión** Γ en $\mathcal{P}$ es asignar un subespacio H_u de T_uP, para cada $u \in P$, tal que

(a) $T_uP = V_u \oplus H_u$;

(b) $H_{ua} = (R_a)_* H_u$ para cada $u \in P$ y $a \in G$, donde R_a es un difeomorfismo de P inducido por $a \in G$, $R_a u = ua$;

(c) H_u depende diferenciablemente sobre u.

La condición (b) significa que la distribución $u \mapsto H_u$ es invariante por G. Denominamos a V_u como el *subespacio vertical* y H_u el *subespacio horizontal* de T_uP. Un vector $X \in T_uP$ es llamado *vertical* (resp. *horizontal*) si este pertenece a V_u (resp. H_u). Por (a), cada vector $X \in T_uP$ puede ser escrito de modo único como

$$X = Y + Z \qquad \text{donde } Y \in V_u \text{ y } Z \in H_u .$$

Llamaremos a Y (resp. Z) la *componente vertical* (resp. *horizontal*) de X y denotaremos este por vX (resp. hX). La condición (c) significa, por definición, que si X es un campo vectorial suave sobre P entonces así lo serán vX y hX. (Esto es equivalente a decir que la distribución $u \mapsto H_u$ es diferenciable).

Dada una conexión Γ en P, definimos una $1-$forma ω sobre P a valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G como sigue. En el capítulo 1 mostramos que cada $A \in \mathfrak{g}$ induce un campo vectorial A^* sobre P, denominado el campo vectorial fundamental correspondiente a A, y que $A \mapsto (A^*)_u$ es un isomorfismo lineal de $\mathfrak{g}$ hacia V_u para cada $u \in P$. Para todo $X \in T_uP$, definimos $\omega(X)$ como siendo el único $A \in \mathfrak{g}$ tal que $(A^*)_u$ es igual a la componente vertical de X, vX. Es claro que $\omega(X) = 0$ si y sólo si X es horizontal. La forma ω es denominada como **la forma conexión** de la conexión Γ dada.

Proposición 3.1 *La forma conexión ω de una conexión satisface las siguientes condiciones:*

(a') $\omega(A^*) = A \quad$ para cada $A \in \mathfrak{g}$;

(b') $(R_a)^*\omega = \mathtt{Ad}(a^{-1})\,\omega$, que es, $\omega((R_a)_*X) = \mathtt{Ad}(a^{-1}) \cdot \omega(X)$ para cada $a \in G$ y cada campo vectorial X sobre P, donde $\mathtt{Ad}$ denota la representación de G en $\mathfrak{g}$.

Recíprocamente, dado una $1-$forma ω a valores en $\mathfrak{g}$ sobre P satisfaciendo las condiciones (a') y (b'), existe una única conexión Γ en P cuya forma conexión es ω.

Demostración: Sea ω la forma conexión de una conexión. La condición (a') sigue inmediatamente de la definición de ω. Puesto que cada campo vectorial de P puede ser descompuesto en campos vectoriales horizontales y campos vectoriales verticales, es suficiente para verificar (b') los siguientes dos casos especiales: (1) X es horizontal y (2) X es vertical. Si X es horizontal, así lo es $(R_a)_*X$ para cada $a \in G$ por la condición (b) para una conexión. Así, $\omega((R_a)_*X)$ y $\mathtt{Ad}(a^{-1}) \cdot \omega(X)$ ambos son nulos. El caso cuando X es vertical, podemos asumir además que X es un campo vectorial fundamental A^*. Entonces $(R_a)_*X$ es el campo vectorial fundamental correspondiente al $\mathtt{Ad}(a^{-1})A$. Así tenemos

$$(R_a^*\omega)_u(X) \;=\; \omega_{ua}((R_a)_*X) \;=\; \mathtt{Ad}(a^{-1})A \;=\; \mathtt{Ad}(a^{-1})(\omega_u(X)) \;.$$

Recíprocamente, dada una forma ω satisfaciendo (a') y (b'), definimos

$$H_u \;=\; \{\; X \in T_uP \mid \omega(X) = 0 \;\} \;.$$

La verificación de que $u \mapsto H_u$ define una conexión cuya forma conexión es ω es directa usando el teorema de Frobenius. $\square$

La proyección $\pi : P \to M$ induce una aplicación lineal $T_u\pi : T_uP \to T_xM$ para cada $u \in P$, donde $x = \pi(u)$. Cuando una conexión es dada, $T_u\pi$ lleva el subespacio horizontal H_u isomórficamente sobre T_xM.

El *levantamiento horizontal* (o simplemente, el *levantamiento*) de un campo vectorial X sobre M es un único campo vectorial X^* sobre P el cual es horizontal y que se proyecta sobre X, esto es, $T_u\pi(X_u^*) = X_{\pi(u)}$ para cada $u \in P$. $(T\pi(X^*) = X)$.

Proposición 3.2 *Dada una conexión en P y un campo vectorial X sobre M, existe un único levantamiento horizontal X^* de X. El levantamiento X^* es invariante por R_a para cada $a \in G$. Recíprocamente, cada campo vectorial X^* sobre P invariante por G es el levantamiento de un campo vectorial X sobre M.*

Demostración: La existencia y unicidad de X^* es clara del hecho de que $T\pi$ produce un isomorfismo lineal de H_u sobre $T_{\pi(u)}M$. Para probar que X^* es diferenciable si X lo es, tomemos una vecindad U de cualquier punto x de M tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$. Usando este isomorfismo, primero obtendremos un campo vectorial Y sobre $\pi^{-1}(U)$ tal que $T\pi Y = X$. Entonces X^* es la componente horizontal de Y y por tanto es diferenciable. La invariancia de X^* bajo G es clara de la invariancia del subespacio horizontal bajo G. Finalmente, sea X^* un campo vectorial horizontal sobre P invariante por G. Para cada $x \in M$, tómese un punto $u \in P$ tal que $\pi(u) = x$ y defínase $X_x = T_u\pi(X_u^*)$. El vector X_x es independiente de la elección de u tal que $\pi(u) = x$, puesto que si $u' = ua$, entonces $T\pi(X_{u'}^*) = T\pi(R_a \cdot X_u^*) = T\pi(X_u^*)$. Es obvio que X^* es entonces el levantamiento del campo vectorial X. □

Proposición 3.3 *Sean X^* y Y^* levantamientos horizontales de X y Y respectivamente. Entonces*

(1) $X^* + Y^*$ es el levantamiento horizontal de $X + Y$;

(2) Para cada función f sobre M, $f^* \cdot X^*$ es el levantamiento horizontal de fX donde f^* es la función sobre P definida por $f^* = f \circ \pi$;

(3) La componente horizontal de $[X^*, Y^*]$ es el levantamiento horizontal de $[X, Y]$.

Demostración: Las dos primeras aseveraciones son triviales. Para la tercera, tenemos

$$T\pi(h[X^*, Y^*]) \; = \; T\pi([X^*, Y^*]) \; = \; [X, Y] \; .$$

□

Sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad coordenada U en M. Sea X_i^* el levantamiento horizontal en $\pi^{-1}(U)$ de los campos vectoriales $X_i = \partial/\partial x^i$ en U para cada i. Entonces $X_1^*, \ldots, X_n^*$ forma una base local para la distribución $u \mapsto H_u$ en $\pi^{-1}(U)$.

Ahora expresaremos una forma conexión ω sobre P mediante una familia de formas todas definidas en un subconjunto abierto de la variedad base M. Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de M con una familia de isomorfismos $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ y la correspondiente familia de funciones de transición $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$. Para cada α, sea $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$ una sección sobre U_α definida por $\sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e)$, $x \in U_\alpha$, donde e es la identidad de G. Sea θ la $1-$forma canónica (invariante a izquierda a valores en $\mathfrak{g}$) sobre G.

Para cada no vacio $U_\alpha \cap U_\beta$, defina una $1-$forma $\theta_{\alpha\beta}$ a valores en $\mathfrak{g}$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$ por

$$\theta_{\alpha\beta} \; = \; \psi_{\alpha\beta}^*\theta \; .$$

Para cada α, defina una $1-$forma ω_α a valores en $\mathfrak{g}$ sobre U_α por

$$\omega_\alpha \; = \; \sigma_\alpha^*\omega \; .$$

Proposición 3.4 *Las formas $\theta_{\alpha\beta}$ y ω_α están sujetas a las condiciones:*

$$\omega_\beta \;=\; \mathtt{Ad}(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta} \qquad \text{sobre } U_\alpha \cap U_\beta \;.$$

Recíprocamente, para cada familia de $1-$formas $\{\omega_\alpha\}$ a valores en $\mathfrak{g}$ definidas sobre U_α y satisfaciendo las precedidas condiciones, existe una única forma conexión ω sobre P la cual da lugar a $\{\omega_\alpha\}$ en la manera descrita.

Demostración: Si $U_\alpha \cap U_\beta$ es no vacio, $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x)$ para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Entonces para cada vector $X \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta)$, el vector $T_x\sigma_\beta(X) \in T_uP$, donde $u = \sigma_\beta(x)$, es la imagen de $(\sigma_\alpha(X), \psi_{\alpha\beta}(X)) \in T_{u'}P + T_aG$, donde $u' = \sigma_\alpha(x)$ y $a = \psi_{\alpha\beta}(x)$, bajo la aplicación $P \times G \to P$. Por la fórmula de Leibniz, tenemos

$$T_x\sigma_\beta(X) \;=\; T_x\sigma_\alpha(X)\psi_{\alpha\beta}(x) + \sigma_\alpha(x)T_x\psi_{\alpha\beta}(X) \;,$$

donde $\sigma_\alpha(X)\psi_{\alpha\beta}(x)$ significa $R_a(T_x\sigma_\alpha(X))$ y $\sigma_\alpha(x)T_x\psi_{\alpha\beta}(X)$ es la imagen de $\psi_{\alpha\beta}(X)$ por la diferencial de $\sigma_\alpha(x)$, $\sigma_\alpha(x)$ son considerados como una aplicación de G hacia P el cual lleva $b \in G$ hacia $\sigma_\alpha(x)b$. Tomando los valores de ω sobre ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\omega_\beta(X) \;=\; \mathtt{Ad}(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1})\omega_\alpha(X) + \theta_{\alpha\beta}(X) \;.$$

En efecto, si $A \in \mathfrak{g}$ es el campo vectorial invariante a izquierda sobre G el que es igual a $\psi_{\alpha\beta}(X)$ en $a = \psi_{\alpha\beta}(x)$ así que $\theta(\psi_{\alpha\beta}(X)) = A$, entonces $\sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(X)$ es el valor del campo vectorial fundamental A^* en $u = \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x)$ y por tanto $\omega(\sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(X)) = A$.

La recíproca puede ser verificado siguiendo hacia atrás el proceso de obtener $\{\omega_\alpha\}$ de ω. $\square$

3.2. Existencia y extensión de conexiones

Sea (P, π, M, G) un fibrado principal y C un subconjunto de M. Decimos que una conexión está definida sobre C si, en cada punto $u \in P$ con $\pi(u) \in C$, un subespacio H_u de T_uP está dada de tal modo que las condiciones (a) y (b) para conexiones sean satisfechas y H_u dependa diferenciablemente sobre u en el siguiente sentido. Para cada punto $x \in C$, existe una vecindad abierta U y una conexión en $P_{|_U} = \pi^{-1}(U)$ tal que el subespacio horizontal para cada $u \in \pi^{-1}(C)$ es el dado por H_u.

Teorema 3.1 *Sea (P, π, M, G) un fibrado principal y C un subconjunto cerrado de M (C puede ser vacio). Si M es paracompacto, cada conexión definida sobre C puede ser extendida a una conexión en P. En particular, P admite una conexión si M es paracompacto.*

Demostración: Para probar este teorema, haremos uso de los siguientes

Lema 3.1 *Una función diferenciable definida sobre un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ puede ser siempre extendida a una función diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$.*

Lema 3.2 *Cada punto de M tiene una vecindad U tal que cada conexión definida sobre un subconjunto cerrado contenido en U puede ser extendida hacia una conexión definida sobre U.*

Demostración: Dado un punto de M, es suficiente considerar un sistema de coordenadas U tal que $\pi^{-1}(U)$ es trivial: $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$. Sobre el fibrado trivial $U \times G$, una forma conexión ω está completamente determinada por su comportamiento en cada punto de $U \times \{e\}$ (e: la identidad de G) porque de la propiedad $R_a^*(\omega) = \mathtt{Ad}(a^{-1})\omega$. Además, si $\sigma : U \to U \times G$ es la sección natural, esto es, $\sigma(x) = (x, e)$ para $x \in U$, entonces ω está completamente determinada por la $1-$forma a valores en $\mathfrak{g}$ sobre U. En efecto, cada vector $X \in T_{\sigma(x)}(U \times G)$ puede ser escrito únicamente en la forma

$$X = Y + Z,$$

donde Y es tangente a $U \times \{e\}$ y Z es vertical así que $Y = \sigma_*(\pi_* X)$. Por tanto tenemos

$$\omega(X) = \omega(\sigma_*(\pi_* X)) + \omega(Z) = (\sigma^*\omega)(\pi_* X) + A \ ,$$

donde A es el único elemento de $\mathfrak{g}$ tal que se corresponde al campo vectorial fundamental A^* que es igual a Z en $\sigma(x)$. Puesto que A depende solamente de Z, no de la conexión, ω está completamente determinada por $\sigma^*\omega$. La ecuación atrás muestra que, recíprocamente, cada $1-$forma a valores en $\mathfrak{g}$ sobre U determina de modo único una forma conexión sobre $U \times G$. Así este lema se reduce al problema de extender la $1-$forma a valores en $\mathfrak{g}$ sobre U. Si $\{A_j\}$ es una base para $\mathfrak{g}$, entonces $\omega = \sum \omega^j A_j$ donde cada ω^j es una $1-$forma usual. Así es suficiente considerar el problema de extender las $1-$formas usuales sobre U. Sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas locales en U. Entonces cada $1-$forma sobre U es de la forma $\sum f_i dx^i$ donde cada f_i es una función sobre U. Así nuestro problema es reducido a extender funciones sobre U. Por tanto este lema sigue del lema anterior.

Ahora continuemos a demostrar el teorema. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto localmente finito de M tal que cada U_i tiene la propiedad establecida en el lema anterior. Sea $\{V_i\}$ un refinamiento abierto de $\{U_i\}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$. Para cada subconjunto J de I, hagamos $S_J = \bigcup_{i \in J} \bar{V}_i$. Sea T el conjunto de pares (τ, J) donde $J \subset I$ y τ es una conexión definida sobre S_J el cual coincide con la conexión dada sobre $A \cap S_J$. Introduciendo un orden en T como sigue: $(\tau', J') < (\tau'', J'')$ si $J' \subset J''$ y $\tau' = \tau''$ sobre $S_{J'}$. Sea (τ, J) el elemento maximal de T. Entonces $J = I$ y τ es una conexión deseada. □

Observación 3.1 Otro modo de probar este teorema es usar el último lema y una partición de la unidad $\{f_i\}$ subordinada a $\{V_i\}$. Sea ω_i una forma conexión sobre $\pi^{-1}(U_i)$ el cual extiende la conexión dada sobre $A \cap \bar{V}_i$. Entonces $\omega = \sum_i g_i \omega_i$ es una forma conexión deseada sobre P, donde cada g_i es la función sobre P definida por $g_i = f_i \circ \pi$.

3.3. Paralelismo

Dada una conexión Γ en un fibrado principal (P, π, M, G), definiremos el concepto de *desplazamiento paralelo* de fibras a lo largo de cualquier curva dada τ en la variedad base M.

Sea $\tau = x_t,\ a \leqslant t \leqslant b$, una curva diferenciable por partes de clase C^1 en M. Un *levantamiento horizontal* o simplemente *levantamiento* de τ es una curva horizontal $\tau^* = u_t,\ a \leqslant t \leqslant b$, en P tal que $\pi(u_t) = x_t$ para $a \leqslant t \leqslant b$. Aquí una curva horizontal en P significa una curva diferenciable por partes de clase C^1 cuyos vectores tangentes son todos horizontales.

La noción de levantamiento de una curva corresponde a la noción de levantamiento de un campo vectorial. En efecto, si X^* es el levantamiento de un campo vectorial X sobre M, entonces la curva integral de X^* a través de un punto $u_0 \in P$ es un levantamiento de la curva integral de X a través del punto $x_0 = \pi(u_0) \in M$. Ahora probaremos

Proposición 3.5 $\pi(u_0) = x_0$, *existe un único levantamiento $\tau^* = u_t$ de τ el cual inicia en u_0.*

Demostración: Por la trivialidad local del fibrado, existe una curva v_t de clase C^1 en P tal que $v_0 = u_0$ y $\pi(v_t) = x_t$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Un levantamiento de τ, si este existe, debe ser de la forma $u_t = v_t a_t$, donde a_t es una curva en el grupo estructural G tal que $a_0 = e$. Centrándonos en la curva a_t en G el cual hace $u_t = v_t a_t$ una curva horizontal. Apliquemos la fórmula de Leibniz a la acción $P \times G \to P$, quien lleva (v, a) en va, y así obtener

$$\dot{u}_t \ = \ \dot{v}_t a_t + v_t \dot{a}_t \ .$$

Sea ω la forma conexión de Γ. Entonces, tenemos

$$\omega(\dot{u}_t) \ = \ \mathtt{Ad}(a_t^{-1})\omega(\dot{v}_t) + a_t^{-1}\dot{a}_t \ ,$$

donde $a_t^{-1}\dot{a}_t$ es ahora una curva en el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ de G. La curva u_t es horizontal si y sólo si $a_t^{-1}\dot{a}_t = -\omega(\dot{v}_t)$ para cada t. La construcción de u_t es así reducida al siguiente

Lema 3.3 *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su respectivo álgebra de Lie identificado con $T_e G$. Sea $Y_t,\ a \leqslant t \leqslant 1$, una curva continua en $T_e G$. Entonces existe en G una única curva a_t de clase C^1 tal que $a_0 = e$ y $\dot{a}_t a_t^{-1} = Y_t$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

Observación 3.2 En el caso cuando $Y_t = A$ para todo t, la curva a_t no es más que el subgrupo a $1-$parámetro de G generado por A. Nuestra ecuación diferencial $\dot{a}_t a_t^{-1} = Y_t$ es por tanto una generalización de la ecuación diferencial para el subgrupo a $1-$parámetro.

Demostración: Podemos asumir que Y_t está bien definida y es continua para todo t, $-\infty < t < \infty$. Definamos un campo vectorial X sobre $G \times \mathbb{R}$ somo sigue. El valor de X en $(a,t) \in G \times \mathbb{R}$ es, por definición, igual a $((Y_t)_a, (d/dz)_t) \in T_aG \times T_t\mathbb{R}$, donde z es el sistema de coordenadas natural en $\mathbb{R}$. Es claro que la curva integral de X que inicia en $(e,0)$ es de la forma (a_t, t) y a_t es la curva deseada en G. Lo que queda por verificar es que a_t está definica para todo t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Sea $\varphi_t = \exp(tX)$ el grupo a $1-$parámetro de difeomorfismos locales de $G \times \mathbb{R}$ generado por X. Para cada $(e,s) \in G\times\mathbb{R}$, existe un número positivo δ_s tal que $\varphi_t(e,r)$ está definida para $|r-s| < \delta_s$ y $|t| < \delta_s$. Como el subconjunto $\{e\} \times [0,1]$ de $G \times \mathbb{R}$ es compacto, podemos escoger $\delta > 0$ tal que, para cada $r \in [0,1]$, $\varphi_t(e,r)$ está definida para $|t| < \delta$. Escogiendo $s_0, s_1, \ldots, s_k$ tal que $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ y $s_i - s_{i-1} < \delta$ para cada i. Entonces $\varphi_t(e,0) = (a_t, t)$ está definida para $0 \leqslant t \leqslant s_1$; $\varphi_u(e, s_1) = (b_u, u+s_1)$ está definida para $0 \leqslant u \leqslant s_2 - s_1$, donde $\dot{b}_u b_u^{-1} = Y_{u+s_1}$, y definimos $a_t = b_{t-s_1}a_{s_1}$ para $s_1 \leqslant t \leqslant s_2$; $\ldots$; $\varphi_u(e, s_{k-1}) = (c_u, s_{k-1}+u)$ está definida para $0 \leqslant t \leqslant s_k - s_{k-1}$, donde $\dot{c}_u c_u^{-1} = Y_{u+s_{k-1}}$, y definimos $a_t = c_{t-s_{k-1}}a_{s_{k-1}}$, así completamos la construcción de a_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. $\square$

Ahora usando la proposición 3.5, definiremos el desplazamiento paralelo de fibras como sigue. Sea $\tau = x_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, una curva diferenciable de clase C^1 sobre M. Sea u_0 un punto arbitrario de P con $\pi(u_0) = x_0$. El único levantamiento τ^* de τ a través de u_0 tiene el punto final u_1 tal que $\pi(u_1) = x_1$. Variando u_0 a lo largo de la fibra $\pi^{-1}(x_0)$ obtenemos una aplicación de la fibra $\pi^{-1}(x_0)$ sobre la fibra $\pi^{-1}(x_1)$ el cual lleva u_0 hacia u_1. Denotaremos esta aplicación por la misma letra τ y denominaremos a este como *desplazamiento paralelo a lo largo de la curva* τ. El hecho de que $\tau : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$ se torne un isomorfismo deviene de la siguiente

Proposición 3.6 *El desplazamiento paralelo a lo largo de cualquier curva τ conmuta con la acción de G sobre P: $\tau \circ R_a = R_a \circ \tau$ para cada $a \in G$.*

Demostración: Esto sigue del hecho de que cada curva horizontal es llevada en otra curva horizontal bajo R_a. $\square$

El desplazamiento paralelo a lo largo de cualquier curva diferenciable por partes de clase C^1 puede ser definida en un modo semejante. Debemos reparar que el desplazamiento paralelo a lo largo de una curva τ es independiente de una específica parametrización usada x_t en el siguiente sentido. Considérese dos curvas parametrizadas x_t, $a \leqslant t \leqslant b$, y y_s, $c \leqslant s \leqslant d$, en M. El desplazamiento paralelo a lo largo de de x_t y el otro a lo largo de y_s coinciden si existe un homeomorfismo φ del intervalo $[a,b]$ sobre $[c,d]$ tal que (1) $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$, (2) φ y φ^{-1} ambos sean diferenciables de clase C^1 excepto para un número finito de valores del parámetro, y (3) $y_{\varphi(t)} = x_t$ para todo t, $a \leqslant t \leqslant b$.

Si τ es la curva x_t, $a \leqslant t \leqslant b$, denotaremos por τ^{-1} a la curva y_t, $a \leqslant t \leqslant b$, definida por $y_t = x_{a+b-t}$. La siguiente proposición es evidente.

Proposición 3.7.

(a) Si τ es una curva diferenciable por partes de clase C^1 en M, entonces el desplazamiento paralelo a lo largo de τ^{-1} es la inversa del desplazamiento paralelo a lo largo de τ.

(b) *Si τ es una curva de x hacia y en M y μ es una curva de y hacia z en M, el desplazamiento paralelo a lo largo de la curva compuesta $\mu \cdot \tau$ es la composición de los desplazamientos paralelos τ y μ.*

3.4. Grupo de holonomía

Usando la noción de desplazamiento paralelo, podemos definir el grupo de holonomía de una conexión dada Γ en un fibrado principal (P, π, M, G). En aras de la simplicidad, diremos curva a una curva diferenciable por partes de clase C^k, con $1 \leqslant k \leqslant \infty$.

Para cada punto x de M denotaremos por $C(x)$ al espacio de lazos en x, esto es, el conjunto de todas las curvas cerradas que inician y terminan en x. Si τ y μ son elementos de $C(x)$, la curva compuesta $\mu \cdot \tau$ (τ seguido de μ) es también un elemento de $C(x)$. Como probamos en la sección anterior, para cada $\tau \in C(x)$, el desplazamiento paralelo a lo largo de τ es un isomorfismo de $\pi^{-1}(x)$ sobre sí mismo. El conjunto de todos tales isomorfismos de $\pi^{-1}(x)$ sobre sí mismo forma un grupo en virtud a la proposición 3.7. Éste grupo es denominado como *grupo de holonomía de Γ con referencia al punto x*. Sea $C^0(x)$ el subconjunto de $C(x)$ que consiste de lazos los cuales son homotópicos a cero. El subgrupo del grupo de holonomía que consiste de desplazamientos paralelos que surgen de todos los $\tau \in C^0(x)$ es denominado como el *grupo de holonomía restricto de Γ con referencia al punto x*. El grupo de holonomía y el grupo de holonomía restricto de Γ con referencial al punto x serán denotados por $\Phi(x)$ y $\Phi^0(x)$ respectivamente.

Es conveniente entender a estos grupos como subgrupos del grupo estructural G del siguiente modo. Sea u un punto arbitrariamente fijado de la fibra $\pi^{-1}(x)$. Cada $\tau \in C(x)$ determina un elemento, digamos, a, de G tal que $\tau(u) = ua$. Si un lazo $\mu \in C(x)$ determina $b \in G$, entonces la compuesta $\mu \cdot \tau$ determina ba porque $(\mu \cdot \tau)(u) = \mu(ua) = (\mu(u))a = uba$. El conjunto de elementos $a \in G$ determinado por todos los elementos $\tau \in C(x)$ forman un subgrupo de G. Este subgrupo, denotado por $\Phi(u)$, es llamado el *grupo de holonomía de Γ con referencia al punto $u \in P$*. El *grupo de holonomía restricto $\Phi^0(u)$ de Γ con referencia al punto u* puede ser definido como una consecuencia. Nótese que $\Phi(x)$ es un grupo de isomorfismos de la fibra $\pi^{-1}(x)$ sobre sí misma y $\Phi(u)$ es un subgrupo de G. Es claro que existe un único isomorfismo de $\Phi(x)$ sobre $\Phi(u)$ el cual hace al siguiente diagrama, conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
C(x) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\Phi(x) \arrow[r] & \Phi(u).
\end{tikzcd}
$$

Otra manera de definir $\Phi(u)$ es la siguiente: Cuando dos puntos u y v de P pueden ser unidos por una curva horizontal, escribiremos $u \sim v$. Éste es claramente una relación de equivalencia. Entonces $\Phi(u)$ es igual al conjunto de $a \in G$ tal que $u \sim ua$. Usando el hecho de que $u \sim v$ implica que $ua \sim uv$ para cualquier$u, v \in P$ y $a \in G$, es sencillo de verificar una vez más que éste subconjunto de G forma un subgrupo de G.

Proposición 3.8.

(a) Si $v = ua$, $a \in G$, entonces $\Phi(v) = \mathtt{Ad}(a^{-1})(\Phi(u))$, esto es, los grupos de holonomía $\Phi(v)$ y $\Phi(u)$ son conjugados en G. Similarmente $\Phi^0(v) = \mathtt{Ad}(a^{-1})(\Phi^0(u))$.

(b) Si dos puntos u y v de P pueden ser unidos por una curva horizontal, entonces $\Phi(u) = \Phi(v)$ y $\Phi^0(u) = \Phi^0(v)$.

Demostración:
(a) Sea $b \in \Phi(u)$ así que $u \sim ub$. Entonces $ua \sim (ub)a$ conduce a que $v \sim (va^{-1})ba$. Por tanto $\mathtt{Ad}(a^{-1})(b) \in \Phi(v)$. Esto implica sencillamente que $\Phi(v) = \mathtt{Ad}(a^{-1})(\Phi(u))$. La prueba para $\Phi^0(v) = \mathtt{Ad}(a^{-1})(\Phi^0(u))$ es similar.

(b) La relación $u \sim v$ implica $ub \sim vb$ para cada $b \in G$. Puesto que la relación $\sim$ es transitiva, $u \sim ub$ si y sólo si $v \sim vb$, esto es, $b \in \Phi(u)$ si y sólo si $b \in \Phi(v)$. Para probar que $\Phi^0(u) = \Phi^0(v)$, sea μ^* una curva horizontal en P de u hacia v. Si $b \in \Phi^0(u)$, entonces existe una curva horizontal τ^* en P de u hacia ub tal que la curva $\pi(\tau^*)$ en M es un lazo en $\pi(u)$ homotópico a cero. Entonces la composición $(R_b\mu^*) \cdot \tau^* \cdot \mu^{-1*}$ es una curva horizontal en P de v hacia vb y su proyección en M es un lazo en $\pi(v)$ homotópico a cero. Así $b \in \Phi^0(v)$. Semejantemente, si $b \in \Phi^0(v)$, entonces $b \in \Phi^0(u)$.
$\square$

Si M es conexa, entonces para cada par de puntos u y v de P, existe un elemento $a \in G$ tal que $v \sim ua$. Esto conduce a que si M es conexo, los grupos de holonomía $\Phi(u)$, $u \in P$, son todos conjugados uno con respecto a otro en G y por tanto isomorfos entre ellos.

El resto de esta sección se dedicará a probar el hecho de que el grupo de holonomía es un grupo de Lie.

Teorema 3.2 *Sea (P, π, M, G) un fibrado principal cuya variedad base M es conexa y paracompacta. Sea $\Phi(u)$ y $\Phi^0(u)$, $u \in P$, el grupo de holonomía y el grupo de holonomía restricto de una conexión Γ con punto de referencia u. Entonces*

(a) $\Phi^0(u)$ es un subgrupo de Lie conexo de G;

(b) $\Phi^0(u)$ es un subgrupo normal de $\Phi(u)$ y $\Phi(u)/\Phi^0(u)$ es numerable.

En virtud a este teorema, $\Phi(u)$ es un subgrupo de Lie de G cuya componente identidad es $\Phi^0(u)$.

Demostración: Una prueba detallada puede encontrarse en (Kobayashi y Nomizu, 1961).

3.5. La forma curvatura y ecuación estructural

Sea $(P.\pi, M, G)$ un fibrado principal y ρ una representación de G sobre un espacio vectorial finito dimensional V; $\rho(a)$ es una transformación lineal de V para cada $a \in G$ y $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ para $a, b \in G$. Una *forma pseudotensorial de grado r sobre P de tipo* (ρ, V) es una $r-$forma φ a valores en V sobre P tal que

$$R_a^*\varphi \ = \ \rho(a^{-1}) \cdot \varphi \qquad \text{para } a \in G \ .$$

Tal forma φ es denominada una *forma tensorial* si este es horizontal en el sentido que $\varphi(X_1, \ldots, X_r) = 0$ siempre que al menos uno de los vectores tangentes X_i de P es vertical, i.e., tangente a la fibra.

Ejemplo 3.1 Si ρ_0 es la representación trivial de G sobre V, que es, $\rho_0(a)$ es la transformación identidad de V para cada $a \in G$, entonces una forma tensorial de grado r de tipo (ρ_0, V) no es nada más que una forma φ sobre P el cual puede ser expresado como $\varphi = \pi^*\varphi_M$ donde φ_M es una $r-$forma a valores en V sobre la base M.

Ejemplo 3.2 Sea ρ una representación de G sobre V y E el fibrado asociado a P con fibra modelo V sobre el cual actua G a través de ρ. Una forma tensorial φ de grado r de tipo (ρ, V) puede ser considerado como una asignación a cada $x \in M$ una aplicación multilineal antisimétrica $\tilde{\varphi}_x$ de $T_xM \times \cdots \times T_xM$ (r veces) hacia el espacio vectorial $\pi_E^{-1}(x)$ quien es una fibra de E sobre x. Quiere decir, definimos

$$\tilde{\varphi}_x(X_1, \ldots, X_r) \ = \ u(\varphi(X_1^*, \ldots, X_r^*)), \qquad X_i \in T_xM,$$

donde u es cualquier punto de P con $\pi(u) = x$ y X_i^* es cualquier vector en u tal que $T_u\pi(X_i^*) = X_i$ para cada i. $\varphi(X_1^*, \ldots, X^*r)$ es entonces un elemento de la fibra modelo V y u es una aplicación lineal de V sobre $\pi_E^{-1}(x)$ así que $u(\varphi(X_1^*, \ldots, X_r^*))$ es un elemento de $\pi_E^{-1}(x)$. Esto puede ser sencillamente verificado que este elemento es independiente de la elección de u y X_i^*. Recíprocamente, dada una aplicación multilineal antisimétrica $\tilde{\varphi}_x : T_xM \times \cdots \times T_xM \to \pi_E^{-1}(x)$ para cada $x \in M$, una forma tensorial φ de grado r de tipo (ρ, V) sobre P puede ser definida por

$$\varphi(X_1^*, \ldots, X_r^*) \ = \ u^{-1}(\tilde{\varphi}_x(\pi(X_1^*), \ldots, \pi(X_r^*))), \qquad X_i^* \in T_uP,$$

donde $x = \pi(u)$. En particular, una $0-$forma tensorial de tipo (ρ, V), esto es, una función $f : P \to V$ tal que $f(ua) = \rho(a^{-1})f(u)$, puede ser identificado con una sección transversal $M \to E$.

Sea Γ una conexión en (P, π, M, G). Sea V_u y H_u los subespacios vertical y horizontal de T_uP, respectivamente. Sea $h : T_uP \to H_u$ la proyección.

Proposición 3.9 *Si φ es una $r-$forma pseudotensorial sobre P de tipo (ρ, V), entonces*

(a) La forma φh definida por $(\varphi h)(X_1, \ldots, X_r) = \varphi(hX_1, \ldots, hX_r)$, $X_i \in T_uP$, es una forma tensorial del tipo (ρ, V);

(b) $d\varphi$ *es una* $(r+1)-$*forma pseudotensorial del tipo* (ρ, V)*;*

(c) La $(r+1)-$*forma* $D\varphi$ *definida por* $D\varphi = (d\varphi)h$ *es una forma tensorial del tipo* (ρ, V)*.*

Demostración: De $R_a \circ h = h \circ R_a,\ a \in G$, conduce a que φh es una forma pseudotensorial del tipo (ρ, V); es evidente que

$$(\varphi h)(X_1, \ldots, X_r) \ = \ 0,$$

si uno de los campos X_i es vertical. (b) sigue de $R_a^* \circ d = d \circ R_a^*,\ a \in G$. (c) sigue de (a) y (b). □

La forma $D\varphi = (d\varphi)h$ es denominada como la *derivada covariante exterior de* φ y D es llamada la *diferenciación covariante exterior.*

Si ρ es la representación adjunta de G en el álgeba de Lie $\mathfrak{g}$, una forma (pseudo)tensorial del tipo $(\rho, \mathfrak{g})$ es denominada como aquella del tipo $\mathtt{Ad}\ G$. La forma conexión ω es una $1-$forma pseudotensorial del tipo $\mathtt{Ad}\ G$. Por la proposición 3.9, $D\omega$ es una $2-$forma tensorial del tipo $\mathtt{Ad}\ G$ y es llamada como **la forma curvatura** de ω.

Teorema 3.3 (Ecuación estructural). *Sea* ω *una forma conexión y* Ω *su forma curvatura. Entonces*

$$d\omega(X,Y) \ = \ -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y) \qquad \text{para } X, Y \in T_uP,\ u \in P.$$

Demostración: Cada vector de P es la suma de un vector vertical y otro horizontal. Puesto que ambos lados de la ecuación anterior son bilineales y antisimétricos en X y Y, es suficiente verificar la igualdad en los tres siguientes casos especiales.

(1) X y Y sean horizontales. En este caso, $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ y la igualdad se reduce a la definición de Ω.

(2) X y Y sean verticales. Sea $X = A^*$ y $Y = B^*$ en u, donde $A, B \in \mathfrak{g}$. Aquí A^* y B^* son los campos vectoriales fundamentales correspondientes a A y B respectivamente. Por lo que tenemos

$$\begin{aligned} 2d\omega(A^*, B^*) &= A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A^*, B^*]) \\ &= -[A, B] \\ &= -[\omega(A^*), \omega(B^*)], \end{aligned}$$

pues $\omega(A^*) = A,\ \omega(B^*) = B$ y $[A^*, B^*] = [A.B]^*$. Por otro lado, $\Omega(A^*, B^*) = 0$.

(3) X sea horizontal y Y vertical. Extendamos X a un campo vectorial horizontal sobre P, al cual también denotaremos por X. Sea $Y = A^*$ en u, donde $A \in \mathfrak{g}$.

Puesto que el lado derecho de la igualdad se anula, es suficiente mostrar que $d\omega(X, A^*) = 0$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} 2d\omega(X, A^*) &= X(\omega(A^*)) - A^*(\omega(X)) - \omega([X, A^*]) \\ &= -\omega([X, A^*])\ . \end{aligned}$$

Ahora es suficiente probar el siguiente

Lema 3.4 *Si A^* es el campo vectorial fundamental correspondiente a un elemento $A \in \mathfrak{g}$ y X es un campo vectorial horizontal, entonces $[X, A^*]$ es horizontal.*

Demostración: El campo vectorial fundamental A^* es inducido por R_{a_t}, donde a_t es el subgrupo a $1-$parámetro de G generado por $A \in \mathfrak{g}$. Así, tenemos

$$[X, A^*] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [R_{a_t}(X) - X].$$

Si X es horizontal, así también lo es $R_{a_t}(X)$. Por tanto $[X, A^*]$ es horizontal. $\square$

Corolario 3.1 *Si X y Y son ambos campos vectoriales horizontales sobre P, entonces*

$$\omega([X, Y]) = -2\Omega(X, Y).$$

La ecuación estructural (comúnmente denominado de *ecuación estructural de E. Cartan*) es aveces escrita, en aras de la simplicidad, como:

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega.$$

Sea $e_1, \ldots, e_r$ una base para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $c^i_{jk}, i, j, k = 1, \ldots, r$, las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ con respecto a $e_1, \ldots, e_r$, esto es,

$$[e_j, e_k] = \sum_i c^i_{jk}\, e_i, \qquad j, k = 1, \ldots, r.$$

Sea $\omega = \sum_i \omega^i e_i$ y $\Omega = \sum_i \Omega^i e_i$. Entonces la ecuación estructural puede ser expresado como sigue:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} c^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k + \Omega^i, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Teorema 3.4 (Identidad de Bianchi).

$$D\Omega = 0\ .$$

Demostración: Por la definición de D, es suficiente probar que $d\Omega(X, Y, Z) = 0$ siempre que X, Y y Z sean todos vectores horizontales. Apliquemos la diferenciación exterior d a la ecuación estructural. Entonces

$$0 = dd\omega^i = -\frac{1}{2} \sum c^i_{jk}\, d\omega^j \wedge \omega^k + \frac{1}{2} \sum c^i_{jk}\, \omega^j \wedge d\omega^k + d\Omega^i\ .$$

Puesto que $\omega^i(X) = 0$ siempre que X sea horizontal, tenemos que

$$d\Omega^i(X, Y, Z) \;=\; 0$$

siempre que X, Y y Z sean todos horizontales. □

Proposición 3.10 *Sea ω una forma conexión y φ una $1-$forma tensorial del tipo $\mathtt{Ad}\,G$. Entonces*

$$D\varphi(X,Y) = d\varphi(X,Y) + \frac{1}{2}[\varphi(X), \omega(Y)] + \frac{1}{2}[\omega(X), \varphi(Y)] \qquad \textit{para } X, Y \in T_uP,\ u \in P.$$

Demostración: Como en la prueba del teorema 3.3, es suficiente considerar los tres casos especiales. Solamente el caso no-trivial es cuando X es vertical y Y horizontal. Sea $X = A^*$ en u, donde $A \in \mathfrak{g}$. Extendamos Y a un campo vectorial horizontal sobre P, denotado también por Y, el cual es invariante por R_a, $a \in G$. (Primero extendamos al vector πY a un campo vectorial sobre M y entonces levantar este a un campo vectorial horizontal sobre P). Entonces $[A^*, Y] = 0$. Como A^* es vertical, $D\varphi(A^*, Y) = 0$. Primero mostremos que el lado derecho de la igualdad se anula. Así, tenemos

$$d\varphi(A^*, Y) \;=\; \frac{1}{2}(A^*(\varphi(Y)) - Y(\varphi(A^*))) - \varphi([A^*, Y]) \;=\; \frac{1}{2}A^*(\varphi(Y)),$$

así que es suficiente mostrar $A^*(\varphi(Y)) + [\omega(A^*), \varphi(Y)] = 0$ o $A^*(\varphi(Y)) = -[A, \varphi(Y)]$. Si a_t denota al subgrupo a $1-$parámetro de G generado por A, entonces

$$\begin{aligned}
A^*_u(\varphi(Y)) \;&=\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi_{ua_t}(Y) - \varphi_u(Y)] \\
&=\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(R^*_{a_t}\varphi)_u(Y) - \varphi_u(Y)] \\
&=\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathtt{Ad}(a^{-1})(\varphi_u(Y)) - \varphi_u(Y)] \\
&=\; [A, \varphi_u(Y)],
\end{aligned}$$

pues Y es invariante bajo R_{a_t}. □

3.6. Aplicación entre conexiones

En los capítulos anteriores consideramos ciertas aplicaciones entre fibrados principales tales como un homomorfismo, una inyección y aquellas que preservan fibra. Ahora estudiaremos los efectos de estas aplicaciones sobre conexiones.

Proposición 3.11 *Sea $f : (P', \pi', M', G') \to (P, \pi, M, G)$ un homomorfismo con el correspondiente homomorfismo $f : G' \to G$ tal que la aplicación inducida $f : M' \to M$ es un difeomorfismo de M' sobre M. Sea Γ' una conexión en P', ω' una forma conexión y Ω' la forma curvatura de Γ'. Entonces* *(a) Existe una única conexión Γ en P tal que los subespacios horizontales de Γ' son llevados a subespacios horizontales de Γ por f.*

(b) Si ω y Ω son la forma conexión y la forma curvatura de Γ respectivamente, entonces $f^*\omega = f \cdot \omega'$ y $f^*\Omega = f \cdot \Omega'$, donde $f \cdot \omega'$ o $f \cdot \Omega'$ significa la forma a valores en $\mathfrak{g}'$ sobre P' definida por $(f \cdot \omega')(X') = f(\omega'(X'))$ o $(f \cdot \Omega')(X', Y') = f(\Omega(X', Y'))$, donde f a la derecha de la igualdad es el homomorfismo $\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ inducido por $f : G' \to G$.

(c) Si $u' \in P'$ y $u = f(u') \in P$, entonces $f : G' \to G$ lleva $\Phi(u')$ sobre $\Phi(u)$ y $\Phi^0(u')$ sobre $\Phi^0(u)$, donde $\Phi(u)$ y $\Phi^0(u)$ (resp. $\Phi(u')$ y $\Phi^0(u')$) son los grupos de holonomía de Γ (resp. Γ') con punto de referencia u (resp. u').

Demostración:

(a) Dado un punto $u \in P$, elíjase $u' \in P'$ y $a \in G$ tal que $u = f(u')a$. Definamos al subespacio horizontal H_u de T_uP por $H_u = R_a \circ f(H_{u'})$, donde $H_{u'}$ es el subespacio horizontal de $T_{u'}P'$ con respecto a Γ'. Debemos mostrar que H_u es independiente de la elección de u' y a. Si $u = f(v')b$, donde $v' \in P'$ y $b \in G$, entonces $v' = u'c'$ para algún $c' \in G'$. Si hacemos $c = f(c')$, entonces $u = f(v')b = f(u'c')b = f(u')cb$ y por tanto $a = cb$. Tenemos $R_b \circ f(H_{v'}) = R_b \circ f(H_{u'c'}) = R_b \circ f \circ R_{c'}(H_{u'}) = R_b \circ R_c \circ f(H_{u'}) = R_a \circ f(H_{u'})$, el cual prueba nuestra aseveración. Deberemos mostrar que la distribución $u \mapsto H_u$ es una conexión en P. Si $u = f(u')a$, entonces $ub = f(u')ab$ y $H_{ub} = R_{ab} \circ f(H_{u'}) = R_b \circ R_a \circ f(H_{u'}) = R_b(H_u)$, así queda probada la invariancia bajo G de la distribución. Ahora deberemos probar que $T_uP = V_u + H_u$, donde V_u es el espacio tangente a la fibra en u. Por la trivialización local de P, es suficiente probar que la proyección $\pi : P \to M$ induce un isomorfismo lineal $\pi : H_u \to T_{\pi(u)}M$. Podemos asumir que $u = f(u')$ puesto que la distribución es invariante bajo G. En el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{u'} & \xrightarrow{f} & H_u \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T_{x'}M' & \xrightarrow{f} & T_xM, \end{array}$$

la aplicación $\pi' : H_{u'}H_{u'} \to T_{x'}M'$ y $f : T_{x'}M' \to T_xM$ son isomorfismos lineales y por tanto las dos aplicaciones restantes también deben ser isomorfismos lineales. La unicidad de Γ es evidente de su construcción.

(b) La igualdad $f^*\omega = f \cdot \omega'$ puede ser reescrita como sigue:

$$\omega(fX') \;=\; f(\omega'(X')) \qquad \text{para } X' \in T_{u'}P',\ u' \in P'.$$

Es suficiente verificar esta ecuación en los dos casos especiales: (1) X' es horizontal, y (2) X' es vertical. Puesto que $f : P' \to P$ lleva cada vector horizontal hacia un vector horizontal, ambos lados de la igualdad se anulan si X' es horizontal.

Si X' es vertical, $X' = A'^*$ en u', donde $A' \in \mathfrak{g}'$. Sea $A = f(A') \in \mathfrak{g}$. Puesto que $f(u'a') = f(u')f(a')$ para cada $a' \in G'$, tenemos que $f(X') = A^*$ en $f(u')$. Así

$$\omega(fX') = \omega(A^*) = A = f(A') = f(\omega'(A'^*)) = f(\omega'(X')).$$

De $f^*\omega = f \cdot \omega'$, obtenemos $d(f^*\omega) = d(f \cdot \omega')$ y $f^*d\omega = f \cdot d\omega'$. Por la ecuación estructural:

$$-\frac{1}{2}f^*([\omega,\omega]) + f^*\Omega \;=\; -\frac{1}{2}f([\omega',\omega']) + f \cdot \Omega' \;,$$

tenemos

$$-\frac{1}{2}[f^*\omega, f^*\omega] + f^*\Omega \;=\; -\frac{1}{2}[f \cdot \omega', f \cdot \omega'] + f \cdot \Omega' \;.$$

Esto implica que $f^*\Omega = f \cdot \Omega'$.

(c) Sea τ un lazo en $x = \pi(u)$. Sea $\tau' = f^{-1}(\tau)$ así que τ' es un lazo en $x' = \pi'(u')$. Sea τ'^* el levantamiento horizontal de τ' iniciando en u'. Entonces $f(\tau'^*)$ es el levantamiento horizontal de τ iniciando en u. El enunciado (c) ahora es trivial.

□

En la situación dada como en la proposición 3.11, decimos que f lleva la conexión Γ' en la conexión Γ. En particular, en el caso cuando (P', π', M', G') es un subfibrado reducido de (P, π, M, G) con inyección f así que $M' = M$ y $f : M' \to M$ es el difeomorfismo identidad, decimos que la conexión Γ en P es *reducible* a la conexión Γ' en P'. Un automorfismo f del fibrado (P, π, M, G) es denominado un *automorfismo de una conexión* Γ en P si este lleva Γ hacia Γ', y en este caso, Γ es dicha que *invariante* por f.

Proposición 3.12 *Sea $f : (P', \pi', M', G') \to (P, \pi, M, G)$ un homomorfismo tal que el homomorfismo correspondiente $f : G' \to G$ lleva G' isomorficamente sobre G. Sea Γ una conexión en P, ω la forma conexión y Ω la forma curvatura de Γ. Entonces*

(a) Existe una única conexión Γ' en P' tal que los subespacios horizontales de Γ' son llevados hacia subespacios horizontales de Γ por f.

(b) Si ω' y Ω' son la forma conexión y la forma curvatura de Γ' respectivamente, entonces $f^*\omega = f \cdot \omega'$ y $f^*\Omega = f \cdot \Omega'$.

(c) Si $u' \in P'$ y $u = f(u') \in P$, entonces el isomorfismo $f : G' \to G$ lleva $\Phi(u')$ hacia $\Phi(u)$ y $\Phi^0(u')$ hacia $\Phi^0(u)$.

Demostración: Definamos Γ' mediante su forma conexión ω'. Sea $\omega' = f^{-1} \cdot f^*\omega$, donde $f^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ es la inversa del isomorfismo $f : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ inducido de $f : G' \to G$. Sea $X' \in T_{u'}P'$ y $a' \in G'$ y sea $X = fX'$ y $a = f(a')$. Entonces tenemos

$$\begin{array}{rclcl}
\omega'(R_{a'}X') & = & f^{-1}(\omega(f(R_{a'}X'))) & = & f^{-1}(\omega(R_aX)) \\
 & = & f^{-1}(\mathtt{Ad}(a^{-1})(\omega(X))) & = & \mathtt{Ad}(a^{-1})(f^{-1}(\omega(X))) \\
 & = & \mathtt{Ad}(a'^{-1})(\omega(X')). & &
\end{array}$$

Sea $A' \in \mathfrak{g}'$ y $A = f(A')$. Sean A y A' denotando los campos vectoriales fundamentales correspondientes a A y A' respectivamente. Entonces tenemos

$$\omega'(A'^{*}) \;=\; f^{-1}(\omega(A^{*})) \;=\; f^{-1}(A) \;=\; A'.$$

Esto prueba que la forma ω' define una conexión. La verificación de los otros enunciados es completamente análoga a la prueba de la proposición 3.11. □

En las condiciones dadas como en la proposición 3.11, decimos que Γ' es *inducida* por f desde Γ. Si f es una aplicación que preserva fibra, esto es, $G' = G$ y $f : G' \to G$ es el automorfismo identidad, entonces $\omega' = f^{*}\omega$. En particual, dado un fibrado (P, π, M, G) y una aplicación $f : M' \to M$, cada conexión en P induce una conexión en el fibrado inducido $f^{-1}P$.

Para cualesquiera fibrados principales (P, π_P, M, G) y (Q, π_Q, M, H), $P \times Q$ es un fibrado principal sobre $M \times M$ con grupo $G \times H$. Sea $P + Q$ la restricción de $P \times Q$ a la diagonal ΔM de $M \times M$. Puesto que ΔM y M son difeomorfos uno con respecto al otro de manera natural, consideremos $P + Q$ como un fibrado principal sobre M con grupo $G \times H$. La restricción de la proyección $P \times Q \to P$ a $P + Q$, denotado por f_P, es un homomorfismo con el correspondiente homomorfismo natural $f_G : G \times H \to G$. Semejantemente, para $f_Q : P + Q \to Q$ y $f_H : G \times H \to H$.

Proposición 3.13 *Sean Γ_P y Γ_Q conexiones en (P, π_P, M, G) y (Q, π_Q, M, H) respectivamente. Entonces*

(a) Existe una única conexión Γ en $P + Q$ tal que el homomorfismo $f_P : P + Q \to P$ y $f_Q : P + Q \to Q$ llevan Γ hacia Γ_P y Γ_Q respectivamente.

(b) Si ω, ω_P y ω_Q son formas conexión y Ω, Ω_P y Ω_Q son las formas curvatura de Γ, Γ_P y Γ_Q respectivamente, entonces

$$\omega \;=\; f_P^{*}\omega_P + f_Q^{*}\omega_Q, \qquad \Omega \;=\; f_P^{*}\Omega_P + f_Q^{*}\Omega_Q.$$

(c) Sea $u \in P$, $u \in Q$, y $(u, v) \in P + Q$. Entonces el grupo de holonomía $\Phi(u, v)$ de Γ (resp. el grupo de holonomía restricto $\Phi^0(u, v)$ de Γ) es un subgrupo de $\Phi(u) \times \Phi(v)$ (resp. $\Phi^0(u) \times \Phi^0(v)$). El homomorfismo $f_G : G \times H \to G$ (resp. $f_H : G \times H \to H$) lleva $\Phi(u, v)$ sobre $\Phi(u)$ (resp. sobre $\Phi(v)$) y $\Phi^0(u, v)$ sobre $\Phi^0(u)$ (resp. sobre $\Phi^0(v)$), donde $\Phi(u)$ y $\Phi^0(u)$ (resp. $\Phi(v)$ y $\Phi^0(v)$) son el grupo de holonomía y el grupo de holonomía restricto de Γ_P (resp. Γ_Q).

La prueba es semejante a la demostración de la proposición 3.11.

Proposición 3.14 *Sea (Q, π_Q, M, H) un subfibrado de (P, π_P, M, G), donde H es un subgrupo de Lie de G. Asúmase que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G admite un subespacio $\mathfrak{m}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ y $\mathit{Ad}(H)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H. Para cada forma conexión ω en P, la $\mathfrak{h}-$componente ω' de ω restricta a Q es una forma conexión en Q.*

Demostración: Sea $A \in \mathfrak{h}$ y A^* el campo vectorial fundamental correspondiente a A. Entonces $\omega'(A^*)$ es la $\mathfrak{h}-$componente de $\omega(A^*) = A$. Por tanto, $\omega'(A^*) = A$. Sea φ la $\mathfrak{m}-$componente de ω restricto a Q. Sea $X \in T_vQ$ y $a \in H$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega(R_aX) &= \omega'(R_aX) + \varphi(R_aX), \\ \mathtt{Ad}(a^{-1})(\omega(X)) &= \mathtt{Ad}(a^{-1})(\omega'(X)) + \mathtt{Ad}(a^{-1})(\varphi(X)). \end{aligned}$$

El lado izquierdo de las dos precedidas igualdades coinciden. Comparando las $\mathfrak{h}-$componentes del lado derecho, obtenemos $\omega'(R_aX) = \mathtt{Ad}(a^{-1})(\omega'(X))$. Obsérvese que usamos el hecho de que $\mathtt{Ad}(a^{-1})(\varphi(X))$ está en $\mathfrak{m}$. □

Observación 3.3 La conexión definida por ω en P es reducible a una conexión en el subfibrado Q si y solo si la restricción de ω a Q es a valores en $\mathfrak{h}$. Bajo las condiciones de la proposición 3.14, significa que $\omega' = \omega$ sobre Q.

3.7. Teorema de la reducción y de holonomía

A menos que se establezca lo contrario, curva significará una curva diferenciable por partes de clase C^∞.

Teorema 3.5 (Teorema de reducción). *Sea (P, π, M, G) un fibrado principal con una conexión Γ, donde M es conexa y paracompacta. Sea u_0 un punto arbitrario de P. Denótese por $P(u_0)$ el conjunto de puntos en P los cuales pueden ser juntados a u_0 por una curva horizontal. Entonces*

(1) $P(u_0)$ es un fibrado reducido con grupo estructural $\Phi(u_0)$.

(2) La conexión Γ es reducible a una conexión en $P(u_0)$.

(1) Primero demostraremos

Lema 3.5 *Sea Q un subconjunto de P, (P, π, M, G), y H un subgrupo de Lie de G. Asuma: (1) la proyección $\pi : P \to M$ lleva Q sobre M; (2) Q es estable por H, i.e., $R_a(Q) = Q$ para cada $a \in H$; (3) si $u, v \in Q$ y $\pi(u) = \pi(v)$, entonces existe un elemento $a \in H$ tal que $v = ua$; y (4) cada punto x de M tiene una vecindad U y una sección $\sigma : U \to P$ tal que $\sigma(U) \subset Q$. Entonces (Q, π_Q, M, H) es un subfibrado reducido de (P, π, M, G).*

Demostración: Para cada $u \in \pi^{-1}(U)$, sea $x = \pi(u)$ y $a \in G$ el elemento determinado por $u = \sigma(x)a$. Defina un isomorfismo $\psi(u) = (x, a)$. Es sencillo de ver que ψ lleva $Q \cap \pi^{-1}(U)$ 1:1 sobre $U \times H$. Introduce una estructura diferenciable en Q de tal manera que $\psi : Q \cap \pi^{-1}(U) \to U \times H$ se torna un difeomorfismo; por lo que Q llega a ser una variedad diferenciable. Ahora es evidente que Q tiene estructura de fibrado principal sobre M con grupo estructural H y que Q es un subfibrado de P.

Demostración del teorema 3.5. (1) Vemos que, de M paracompacto, el grupo de holonomía $\Phi(u_0)$ es un subgrupo de Lie de G y que el subconjunto $P(u_0)$ y el grupo $\Phi(u_0)$ satisfacen las condiciones (1), (2) y (3) del último lema. Para verificar (4), del lema, sea $x^1, \ldots, x^n$ un sistema de coordenadas local entorno de x tal que x es el origen $(0, \ldots, 0)$ con respecto a este sistema de coordenadas. Sea U una vecindad cúbita de x definida por $|x^i| < \delta$. Dado cualquier punto $y \in U$, sea τ_y el segmento de linea de x a y con respecto al sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Fijando un punto $u \in Q$ tal que $\pi(u) = x$. Sea $\sigma(y)$ el punto de P obtenido por el desplazamiento paralelo de u a lo largo de τ_y. Entonces $\sigma : U \to P$ es una sección tal que $\sigma(U) \subset Q$. Ahora (1) del teorema 3.5 sigue de este último lema.
(2) Es inmediata consecuencia del siguiente

Lema 3.6 *Sea (Q, π_Q, M, H) un subfibrado de (P, π, M, G) y Γ una conexión en P. Si, para cada $u \in Q$, el subespacio horizontal de T_uP es tangente a Q, entonces Γ es reducible a la conexión en Q.*

Demostración: Definimos una conexión Γ' en Q como sigue. El subespacio horizontal de T_uQ, $u \in Q$, con respecto a Γ' es por definición el subespacio horizontal de T_uP con respecto a Γ. Es obvio que Γ es reducible a Γ'. □

Llamaremos a $P(u)$ el *fibrado de holonomía* a través de u. Es evidente que $P(u) = P(v)$ si y solo si u y v pueden se juntados por una curva horizontal. Como la relación $\sim$ ($u \sim v$ si u y v pueden ser unidos por una curva horizontal) es una relación de equivalencia, tenemos, para cada par de puntos u y v de P, o $P(u) = P(v)$ o $P(u) \cap P(v) = \emptyset$. En otras palabras, P es descompuesto en la unión disjunta de fibrados de holonomía. Puesto que cada $a \in G$ lleva cada curva horizontal en una curva horizontal, $R_a(P(u)) = P(ua)$ y $R_a : P(u) \to P(ua)$ es un isomorfismo con el correspondiente isomorfismo $\mathtt{Ad}(a^{-1}) : \Phi(u) \to \Phi(ua)$ del grupo estructural. Es sencillo de ver que, dado cualesquier u y v, existe un elemento $a \in G$ tal que $P(v) = P(ua)$. Así el fibrado de holonomía $P(u)$, $u \in P$, son todos isomorfos uno con respecto al otro.

Teorema 3.6 *Sea (P, π, M, G) un fibrado principal, donde M es conexa y paracompacto. Sea Γ una conexión en P, Ω la forma curvatura, $\Phi(u)$ el grupo de holonomía con punto referencial $u \in P$ y $P(u)$ el fibrado de holonomía a través de u de Γ. Entonces el álgebra de Lie de $\Phi(u)$ es igual al subespacio de $\mathfrak{g}$, álgebra de Lie de G, generado por todos los elementos de la forma $\Omega_v(X, Y)$, donde $v \in P(u)$ y X y Y son vectores horizontales arbitrarios en v.*

Demostración: En virtud al teorema 3.5, podemos asumir que $P(u) = P$, i.e., $\Phi(u)) = G$. Sea $\mathfrak{g}'$ el subespacio de $\mathfrak{g}$ generado por todos los elementos de la forma $\Omega_v(X, Y)$, donde $v \in P(u) = P$ con X y Y vectores horizontales arbitrarios en v. El subespacio $\mathfrak{g}'$ es en realidad un ideal de $\mathfrak{g}$, porque Ω es una forma tensorial del tipo $\mathtt{Ad}G$ y por tanto $\mathfrak{g}'$ es invariante bajo $\mathtt{Ad}G$. Deberemos probar que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Para cada punto $v \in P$, sea S_v el subespacio de T_vP generado por el subespacio horizontal H_v y por el espacio $\mathfrak{g}'_v = \{ A^*_v \mid A \in \mathfrak{g}' \}$, donde A^* es el campo vectorial fundamental sobre P correspondiente a A. La distribución S tiene dimensión $n+r$, donde $n = \dim M$ y $r = \dim \mathfrak{g}'$. Debemos mostrar que S es diferenciable e involutivo. Sea v un punto arbitrário de P y U una vecindad coordenada de $y = \pi(v) \in M$ tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo con $U \times G$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ campos vectoriales diferenciables sobre U los cuales son linealmente independientes en todas partes sobre U y $X_1^*, \ldots, X_n^*$ los levantamientos horizontales de $X_1, \ldots, X_n$. Sea $A_1, \ldots, A_r$ una base para $\mathfrak{g}'$ y $A_1^*, \ldots, A_R^*$ los correspondientes campos vectoriales fundamentales. Es claro que $X_1^*, \ldots, X_n^*, A_1^*, \ldots, A_r^*$ forma una base local para S. Para probar que S es involutiva, es suficiente verificar que el bracket de cualesquiera dos campos vectoriales pertenecen a S. Es claro para $[A_i^*, A_j^*]$, puesto que $[A_i, A_j] \in \mathfrak{g}'$ y $[A_i, A_j]^* = [A_i^*, A_j^*]$. Además $[A_i^*, X_j^*]$ es horizontal; en realidad $[A_i^*, X_j^*] = 0$ como X_j^* es invariante por R_a para cada $a \in G$. Finalmente, sea $A = \omega([X_i^*, X_j^*]) \in \mathfrak{g}$, donde ω es la forma conexión de Γ. También reparemos que $A = \omega([X_i^*, X_j^*]) = -2\Omega(X_i^*, X_j^*) \in \mathfrak{g}'$. Puesto que la componente vertical de $[(X_i^*, X_j^*)]$ en $v \in P$ es igual a $A_v^* \in S_v$, $[X_i^*, X_j^*]$ pertenece a S. Esto prueba nuestra aseveración de que S es involutiva.

Sea P_0 la variedad integral maximal de S a través de u. Por la maximalidad de P_0, tenemos que $P = P_0$. Además,

$$\dim \mathfrak{g} \;=\; \dim(P) - n \;=\; \dim(P_0) - n \;=\; \dim \mathfrak{g}' \;.$$

Esto implica que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. □

3.8. Conexiones planas

Sea $P \times G$ un fibrado principal trivial. Para cada, $a \in G$ el conjunto $M \times \{a\}$ es una subvariedad de P. En particular, $M \times \{e\}$ es una subvariedad de P, donde e es la identidad de G. La *conexión canónica plana* en P está definida tomando el espacio tangente a $M \times \{a\}$ en $u = (x, a) \in M \times G$ como el subespacio horizontal en u. En otras palabras, una conexión en P es la conexión canónica plana si y solo si este es reducible a una única conexión en $M \times \{e\}$. Sea θ la $1-$forma canónica sobre G. Sea $f : M \times G \to G$ la proyección natural y sea

$$\omega \;=\; f^*\theta \;.$$

Es facil de verificar que ω es la forma conexión de la conexión canónica plana en P. La ecuación de Maurer-Cartan de θ implica que la conexión canónica plana tiene curvatura cero:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(f^*\theta) = f^*(d\theta) = f^*(\tfrac{1}{2}[\theta, \theta]) \\ &= \tfrac{1}{2}[f^*\theta, f^*\theta] = \tfrac{1}{2}[\omega, \omega] \;. \end{aligned}$$

Una conexión en cualquier fibrado principal (P, π, M, G) es denominado **plana** si cada punto x de M tiene una vecindad U tal que la conexión inducida en $P_{|_U} = \pi^{-1}(U)$ es isomorfo con la conexión canónica plana en $U \times G$. Siendo más precisos, existe un isomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ el cual lleva subespacios horizontales en cada $u \in \pi^{-1}(U)$ sobre subespacios horizontales en $\phi(u)$ de la conexión canónica plana en $U \times G$.

Teorema 3.7 *Una conexión en (P, π, M, G) es plana si y solo si la forma curvatura se anula idénticamente.*

Demostración: Asuma que la forma curvatura se anula idénticamente. Para cada punto x de M, sea U una simple vecindad abierta y conexa de x y considere la conexión inducida en $P_{|U} = \pi^{-1}(U)$. El grupo de holonomía de la conexión inducida en $P_{|U}$ consiste de solamente la identidad. Aplicando el teorema de reducción, teorema 3.5, vemos que la conexión inducida en $P_{|U}$ es isomorfo con la conexión canónica plana en $U \times G$. La recíproca es evidente. □

Corolario 3.2 *Sea Γ una conexión en (P, π, M, G) tal que la curvatura se anula idénticamente. Si M es paracompacta y simplemente conexa, entonces P es isomorfo con el fibrado trivial $M \times G$ y Γ es isomorfo con la conexión canónica plana en $M \times G$.*

Estudiaremos el caso cuando M no es necesariamente simplemente conexa. Sea Γ una conexión plana en (P, π, M, G), donde M es conexa y paracompacta. Sea $u_0 \in P$ y $M^* = P(u_0)$, el fibrado de holonomía através de u_0; M^* es un fibrado principal sobre M cuyo grupo estructural es el grupo de holonomía $\Phi(u_0)$. Puesto que $\Phi(u_0)$ es discreto y como M^* es conexa, M^* es un espacio de recubrimiento de M. Sea $x_0 = \pi(u_0)$, $x_0 \in M$. Cada curva cerrada de M iniciando en x_0 define, por medio del desplazamiento paralelo a lo largo de éste, un elemento de $\Phi(u_0)$. Puesto que el grupo de holonomía es trivial, cualesquier dos curvas cerradas en x_0 representando al mismo elemento del primer grupo de homotopía $\pi_1(M, x_0)$ da lugar al mismo elemento de $\Phi(u_0)$. Así obtenemos un homomorfismo de $\pi_1(M, x_0)$ sobre $\Phi(u_0)$. Sea N el subgrupo normal de $\Phi(u_0)$ y sea $M' = M^*/N$. Entonces M' es un fibrado principal sobre M con grupo estructural $\Phi(u_0)/N$. En particular, M' es un espacio de recubrimiento de M. Sea (P', π', M', G) el fibrado principal inducido de (P, π, M, G) por la proyección de recubrimiento $M' \to M$. Sea $f : P' \to P$ el homomorfismo natural.

Proposición 3.15 *Existe una única conexión Γ' en (P', π', M', G) el cual es llevado hacia Γ por el homomorfismo $f : P' \to P$. La conexión Γ' es plana. Si u'_0 es un punto de P' tal que $f(u'_0) = u_0$, entonces el grupo de holonomía $\Phi(u'_0)$ de Γ' con punto referencial u'_0 es isomorficamente llevado sobre N por f.*

Demostración: Es claro que la forma curvatura de Γ' de anula idénticamente y Γ' es plana. Observemos que P' es el subconjunto de $M' \times P$ definida como sigue:

$$P' \;=\; \{\ (x', u) \in M \times P \mid \mu(x') = \pi(u)\ \}\ ,$$

donde $\mu : M' \to M$ es la proyección del recubrimiento. La proyección $\pi' : P' \to M'$ es dada por $\pi' : (x', u) = x'$ y el homomorfismo $f : P' \to P$ es dada por $f(x', u) = u$ así que el correspondiente homomorfismo $f : G \to G$ del grupo estructural es el automorfismo identidad. Para probar que f lleva $\Phi(u'_0)$ isomórficamente sobre N, éste es además suficiente probar que $\Phi(u'_0) = N$. Escriba

$$u'_0 \;=\; (x'_0, u_0) \in P' \subset M' \times P\ .$$

Como $\mu(x_0') = \pi(x_0)$, existe un elemento $a \in \Phi(u_0)$ tal que

$$x_0' \;=\; \nu(u_0 a) \;,$$

donde $\nu : M^* = P(u_0) \to M' = P(u_0)/N$ es la proyección recubrimiento. Sea $\tau = u_0',\; 0 \leqslant t \leqslant 1$, una curva horizontal en P' tal que $\pi'(u_0') = \pi'(u_1')$. Para cada t, hacemos

$$u_t' \;=\; (x_t', u_t) \in P' \subset M' \times P \;.$$

Entonces la curva $u_t,\;\; \leqslant t \leqslant 1$, es horizontal en P y por tanto está contenida en $M^* = P(u_0)$. Puesto que $\mu(x_t') = \pi(u_t) = \mu \circ \nu(u_t)$ y $x_0' = \nu(u_0 a)$, tenemos $x_t' = \nu(u_t a)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Tenemos que

$$\nu(u_1 a) \;=\; x_1' \;=\; \pi'(u_1') \;=\; \pi'(u_0) \;=\; x_0' \;=\; \nu(u_0 a)$$

y, consecuentemente,

$$\nu(u_1) \;=\; \nu(u_0) \;,$$

lo que significa que $u_1 = u_0 b$ para algún $b \in N$. Esto muestra que $\Phi(u_0') \subset N$. Recíprocamente, sea b cualquier elemento de N. Sea $u_t,\; 0 \leqslant t \leqslant 1$, una curva horizontal en P tal que $u_1 = u_0 b$. Defina una curva horizontal $u_t',\; 0 \leqslant t \leqslant 1$, en P' por

$$u_t' \;=\; (x_t', u_t) \;,$$

donde $x_t' = \nu(u_t a)$. Entonces $u_t' = u_0' b$, mostrando que $b \in \Phi(u_0')$.

$\square$

III. Metodología y conclusión

La presente tesis exhibe un modo compacto de describir las diferentes estructuras geométricas conocidas en la geometría diferencial. Puesto que el grupo estructural siendo un grupo de Lie arbitrario, nos permite considerar como casos particulares a las diferentes geometrías conocidas. Este abordage general permite desarrollar estructuras geométricas más generalizadas. Y que, en efecto, la literatura contemporánea así lo muestra. Para poder obtener ésta generalización fue preciso usar las metodologías de construcción de fibrados generales con grupo estructural (constructivo, deductivo, analítico y sintético).

Por tanto para percibir ésta generalización debemos hacer ciertas adaptaciones. Por ejemplo tener en cuenta siempre que las diferentes geometrías son desarrolladas sobre el grupo de Lie $G = GL(m, \mathbb{F})$, donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, grupo lineal general. Adaptemos la teoría desarrollada en ésta presente tesis al fibrado tangente TM, de una variedad diferenciable M. Es decir, como sigue:

Sea $\mathbb{F}^m$ el espacio vectorial de todas las $m-$úplas de elementos de $\mathbb{F}$ y $GL(m; \mathbb{F})$ el grupo de todas las matrices no-singulares con entradas de $\mathbb{F}$. El grupo $GL(m; \mathbb{F})$ actúa sobre $\mathbb{F}^m$ por la izquierda en un modo natural; si $a = (a^i_j) \in GL(m; \mathbb{F})$ y $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m) \in \mathbb{F}^m$, entonces $a\xi = (\sum_j a^1_j \xi^j, \ldots, \sum_j a^m_j \xi^j) \in \mathbb{F}^m$.

Sea (P, π, M, G) un fibrado principal y ρ una representación de G en $GL(m; \mathbb{F})$. Así sea $E(P \times_G \mathbb{F}^m, \pi_E, M, \mathbb{F}^m)$ el fibrado asociado a P con fibra típica $\mathbb{F}^m$ sobre el cual G actúa mediante ρ. Llamaremos a E como el *fibrado vectorial*, real o complejo, sobre M, de acuerdo a cuando sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Cada fibra $\pi_E(x),\ x \in M$, de E tiene la estructura de un espacio vectorial tal que cada $u \in P$, con $\pi(u) = x$ y considerado como una aplicación de $\mathbb{F}^m$ sobre $\pi_E^{-1}(x)$, es un isomorfismo lineal de $\mathbb{F}^m$ sobre $\pi_E^{-1}(x)$. Sea S el conjunto de secciones $\varphi : M \to E$; éste forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ (de dimensión infinita si $m \geqslant 1$) con la adisión y multiplicación definidas por

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x), \quad \varphi, \psi \in S, \quad x \in M, \\ (\lambda\varphi)(x) &= \lambda(\varphi(x)), \quad \varphi \in S, \lambda \in \mathbb{F}, \quad x \in M. \end{aligned}$$

Podemos también considerar a S como un módulo sobre el álgebra de funciones a valores en $\mathbb{F}$; si λ es una función a valores en $\mathbb{F}$ sobre M, entonces

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda(x) \cdot \varphi(x), \quad \varphi \in S, \quad x \in M.$$

Sea Γ una conexión en P. Recordando cómo Γ define la noción de desplazamiento paralelo de las fibras de E. Si $\tau = x_t,\ a \leqslant t \leqslant b$, es una curva en M y $\tau^* = u_t$ es un levantamiento horizontal de τ hacia P, entonces, para cada $\xi \in \mathbb{F}^m$ prefijado, la curva $\tau' = u_t\xi$ es, por definición, un levantamiento horizontal de τ hacia E.

Sea φ una sección de E definido sobre $\tau = x_t$ por lo que $\pi_E \circ \varphi(x_t) = x_t$ para todo t. Sea $\dot{x}_t$ el vector tangente a τ en x_t. Entonces, para cada t fijado, la **derivada covariante $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi$ de φ en la dirección de (o con respecto a) $\dot{x}_t$** es

$$\nabla_{\dot{x}_t}\varphi \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})) - \varphi(x_t)]\ ,$$

donde $\tau_t^{t+h} : \pi_E^{-1}(x_{t+h}) \to \pi_E^{-1}(x_t)$ denota el desplazamiento paralelo de la fibra $\pi_E^{-1}(x_{t+h})$ a lo largo de τ de x_{t+h} a x_t. Así, $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi \in \pi_E^{-1}(x_t)$ para cada t y define una sección de E a lo largo de τ. La sección φ es paralelo, ésto es, la curva $\varphi(x_t)$ en E es horizontal, si y sólo si $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi = 0$ para todo t.

Sea $X \in T_xM$ y φ una sección de E definida en una vecindad de x. Entonces la **derivada covariante $\nabla_X\varphi$ de φ en la dirección de** X está definida como sigue. Sea $\tau = x_t,\ -\epsilon \leqslant t \leqslant \epsilon$, una curva tal que $X = \dot{x}_0$. Entonces hacemos

$$\nabla_X\varphi \;=\; \nabla_{\dot{x}_t}\varphi\ .$$

Es sencillo de ver que $\nabla_X\varphi$ es independiente de la elección de τ. Una sección φ de E definida sobre un subconjunto abierto U de M es paralela si y sólo si $\nabla_X\varphi = 0$ para todo $X \in T_xM,\ x \in U$.

Hasta aquí reproducimos la teoría de conexiones sobre un fibrado vectorial E a partir de una conexión Γ sobre un fibrado principal P particular.

Para concluir y dejar clara la relevancia de la teoría de fibrados principales y conexiones definidas sobre ésta, como mostrado en la tesis, es percibir que la geometría es caracterizada por la simetría (grupo de Lie) subyacente sobre ésta. Esto quiere decir:

(a) Si $G = O(n)$, se trata de la Geometría Riemanniana;

(b) Si $G = O(1, n-1)$, se trata de la Geometría Lorentziana;

(c) Si $G = O(p, q)$, se trata de la Geometría pseudo-Riemanniana;

(d) Si $G = Sp(n)$, se trata de la Geometría Simpléctica;

(e) Si $G = U(n)$, se trata de la Geometría de Kähler;

(f) Si $G = U(p, q)$, se trata de la Geometría pseudo-Kähleriana;

Bibliografía

[1] Abraham, R. y Marsden, J.E. (1978) *Foundations of mechanics*, 2^{nd} edition, Benjamin/Cummings, Reading.

[2] Bleecker, D., (1981) *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts.

[3] Greub, W.H. y Halperin, S. (1972) (1973) *Connections, Curvature and Cohomology*, Academic Press, New York (Vol. 1, vol. 2).

[4] Kobayashi, S. y Nomizu, K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, Vol. 1.

[5] Kolár, I., Michor P.W. y Slovák, J. (1993) *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, Berlin.

[6] Learth Soares, B. (2007) *Simetrias Globais e Locais em Teorias de Calibre*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo.

[7] Mangiarotti, L. y Sardanashvily, G. (2000) *Connections in Classical and Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore.

[8] Saunders, D.J. (1989) *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge University Press, Cambridge.

[9] Steenrod, N. (1951) *The topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton.

Alexsander Apaico Cordova
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas, con especialidad en Matemáticas de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Magister en Administración de la Educación.
Ponente a nivel Nacional e Internacional.
Editor de Libros académicos y de investigación.
Apasionado a la investigación.
apaicoalexs@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7338-1671

Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
https://orcid.org/0000-0001-7084-5840
daul.paiva@unsch.edu.pe
daulpaivay@gmail.com
Licenciado en Matemática por la Universidad Nacional de Piura.
Magíster en Matemática Aplicada por la Universidad Nacional de Piura. Docente Asociado a Dedicación Exclusiva en la UNSCH. Experiencia en Docencia Universitaria por más de 15 años en diversas universidades del Perú. Ponente en eventos académicos nacionales e internacionales. Estudios de Doctorado en Matemática en el Instituto de Matemática y Ciencias Afines de la Universidad Nacional de Ingeniería. Miembro del Colegio de Matemáticos del Perú (COMAP) con número de colegiatura 1489.

Guillermo Jesús Zela Quispe
Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga
guillermo.zela@unsch.edu.pe
Licenciado en Matemáticas de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, con número de registro 1249 del Colegio de Matemáticos del Perú (COMAP). Estudios de Maestría en Matemática Pura en la Pontifica Universidad Católica del Perú. Docente de categoría Auxiliar a Tiempo Completo, con experiencia en Docencia Universitaria 14 años dictando cursos de Matemáticas en la universidad.

José Carlos Juarez Pulache
https://orcid.org/0000-0003-0016-506X
pulachejuarez@gmail.com, jose.juarez@unsch.edu.pe
Licenciado en Matemática de la Universidad Nacional de Piura, con registro N° 1499 del Colegio de Matemáticos del Perú-COMAP. Magister en Matemática Aplicada. Docente en la categoría Auxiliar, con 10 años de experiencia universitaria en diferentes universidades del Perú.

Savez
editorial

ISBN: 978-9942-603-65-4
9 789942 603654